Remerciements

J'exprime toute ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu durant la réalisation de ce travail.

Je pense tout particulièrement à ma mère pour tous les sacrifices qu'elle a faits pour que je puisse poursuivre mes études en Suisse. Ses encouragements, ses conseils précieux et son amour m'ont donné la force d'aller jusqu'au bout.

Je remercie mon directeur de thèse, le Professeur C. A. Stuart. Sa bonne humeur, son enthousiasme et sa faculté de se mettre à la portée de ses doctorants ont fait de nos entretiens des moments très agréables aux résultats fructueux. Je lui suis reconnaissant de m'avoir proposé un sujet de recherche très intéressant et ouvert, et d'avoir su me guider par ses conseils avisés. J'ai beaucoup progressé à son contact.

J'adresse un grand Merci à mon frère Naoufel qui m'a donné envie de faire des mathématiques.

J'exprime aussi ma gratitude au Professeur B. Zwahlen qui m'a permis de m'inscrire à l'EPFL et au Professeur B. Buffoni pour sa disponibilité et pour l'intérêt qu'il a porté aux questions que je lui ai posées.

J'aimerais adresser mes remerciements à Nicole et Aami Hafedh qui m'ont beaucoup aidé à m'installer et à démarrer en Suisse.

Mes remerciements vont également aux Professeurs D. Fortunato, F. Brock, R. Dalang et B. Buffoni pour avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse. Je tiens à témoigner ma reconnaissance au Professeur F. Brock qui m'a fait l'honneur, l'année dernière, d'accepter mon invitation pour discuter de quelques problèmes de symétrisation.

Je remercie chaleureusement Madame M.-H. Gellis pour sa gentillesse et son aide précieuse lors de la composition de ma thèse.

Table des matières

Résumé

Les inégalités de symétrisation :

$$\int G\big(u_1(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(u_1^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{« \textit{Cavalieri's principle} »} \tag{C}$$

et

$$\int G\big(|x|, u_1(x), \ldots, u_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, u_1^*(x), \ldots, u_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \tag{$\mathrm{H^s}$}$$

où $\big(u_i\big)_{1\leq i\leq n} \in L_+^p(\mathbb{R}^N)$ et u_i^* désigne la symétrisée de Schwarz de u_i, sont d'une grande importance dans le domaine des équations aux dérivées partielles où il est naturel d'étudier ($\mathrm{H^s}$) pour les intégrands mesurables en la première variable.

A notre connaissance, cette inégalité n'a été montrée que pour des intégrands continus.

La première partie de ce travail est consacrée à la mise en place d'une nouvelle approche qui permet de généraliser tous les résultats concernant (C) et ($\mathrm{H^s}$) à des intégrands non continus.

Grâce à une étude subtile des conséquences de l'équimesurabilité d'une fonction et de sa symétrisée de Schwarz, nous avons prouvé le « *Cavalieri's principle* » pour des intégrands boréliens.

Afin de démontrer ($\mathrm{H^s}$) pour les intégrands non continus, nous avons développé une méthode basée sur une réécriture des fonctions étagées mieux adaptée à nos objectifs.

Pour les opérateurs G non continus ayant une certaine monotonie, ($\mathrm{H^s}$) est vraie. Les hypothèses de monotonie peuvent être affaiblies grâce à (C).

Nos résultats concernant ($\mathrm{H^s}$) nous ont permis de déterminer une large classe de fonctions de Carathéodory G pour laquelle

$$I_c = \inf_{u\in S_c} \left\{ \frac{1}{2}\int \big|\nabla u\big|^2\,\mathrm{d}x - \int G\big(|x|, u(x)\big)\,\mathrm{d}x \right\}\,, \tag{$\mathrm{P_c}$}$$

où $S_c = \big\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid \big|u\big|_2^2 = c\big\}$, $c > 0$, est atteint par une fonction positive radiale et radialement décroissante.

Grâce aux inégalités de symétrisation mentionnées dans les lignes précédentes, nous avons obtenu aussi des informations très fines sur I_c. Ceci nous a aidé à écarter les phénomènes qui interdisent aux suites minimisant ($\mathrm{P_c}$) de converger. Cette propriété de compacité est cruciale dans l'étude de l'équation de Schrödinger.

Abstract

The symmetrization inequalities :

$$\int G\big(u_1(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(u_1^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{« Cavalieri's principle »} \tag{C}$$

and

$$\int G\big(|x|, u_1(x), \ldots, u_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, u_1^*(x), \ldots, u_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \tag{H$^{\mathrm{s}}$}$$

where $\big(u_i\big)_{1\leq i\leq n} \in L_+^p(\mathbb{R}^N)$ and u_i^* is the Schwarz symmetrization of u_i, are used for several purposes in the field of partial differential equations.

In the context of (H$^{\mathrm{s}}$), it is natural to suppose that G is measurable with respect to the first variable. For smooth functions G, this inequality was proved by F. Brock. However, we are not aware of any previous results concerning (H$^{\mathrm{s}}$) (and (C)) in the case where G is not continous.

The purpose of the first part of this work is to present a self-contained proof of (C) and (H$^{\mathrm{s}}$) in the context of non continous integrants G having the requisite properties.

Thanks to a subtle study of consequences of the equimeasurability of a function and of its Schwarz symmetrization, we prove Cavalieri's principle for Borel measurable integrants.

In order to show (H$^{\mathrm{s}}$) for non continous integrants, we develop a method based upon a suitable rewriting of step functions.

For non continous operators G having certain monotonocity properties, (H$^{\mathrm{s}}$) holds. We then show that some of the restrictions on G can be relaxed using (C).

Our results concerning (H$^{\mathrm{s}}$) allow us to establish a large class of Caratheodory functions G such that

$$I_c = \inf_{u\in S_c}\left\{\frac{1}{2}\int \big|\nabla u\big|^2\,\mathrm{d}x - \int G\big(|x|, u(x)\big)\,\mathrm{d}x\right\}\,, \tag{P$_{\mathrm{c}}$}$$

where $S_c = \big\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \;\big|\; \big|u\big|_2^2 = c\big\}$, $c > 0$, is achieved by a non-negative, radially symmetric and radially decreasing function.

Using (H$^{\mathrm{s}}$), we then obtain useful informations about I_c which help us to prove the convergence of minimizing sequences of (P$_{\mathrm{c}}$). This property is crucial in the study of the Schrödinger equation.

Chapitre 1

Introduction

L'importance des inégalités de symétrisation découle de leurs innombrables applications dans différents domaines : géométrie riemanienne, équations aux dérivées partielles, calcul des variations, etc.

Le réarrangement ou la symétrisation de Schwarz consiste à construire, à partir d'un élément appartenant à un espace fonctionnel approprié (voir déf. 2.1 et déf. 3.3), une fonction radiale et radialement décroissante qui vérifie :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f^p = \int_{\mathbb{R}^N} \big(f^*\big)^p & \text{pour tout } f \in L^p_+(\mathbb{R}^N) \\ \displaystyle\int_{\omega} f^p = \int_{\omega^*} \big(f^*\big)^p & \text{pour tout } f \in L^p_+(\omega)\,, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où $p \in [1, \infty)$, ω est un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}^N$ et ω^* désigne la boule ayant la même mesure que ω.

La propriété qui a rendu le domaine des inégalités de symétrisation encore plus attrayant est

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \big|\nabla f^*\big|^p \le \int_{\mathbb{R}^N} \big|\nabla f\big|^p & \text{pour tout } f \in W^{1,p}_+(\mathbb{R}^N) \\ \displaystyle\int_{\omega^*} \big|\nabla f^*\big|^p \le \int_{\omega} \big|\nabla f\big|^p & \text{pour tout } f \in W^{1,p}_+(\omega)\,. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Ces inégalités ont été prouvées par Polya et Szegö en 1951.

Depuis, (1.1) et (1.2) sont devenues deux outils puissants dans le domaine des équations aux dérivées partielles comme les travaux de [1], [18] et [22] sur les domaines bornés en témoignent.

Sur les domaines non bornés, nous retenons tout particulièrement les travaux de C. A. Stuart ([26] et [27]) qui a prouvé que ces deux propriétés sont très utiles pour établir l'existence d'un état fondamental de l'équation différentielle

$$\Delta u + |u|^\sigma u + \lambda u = 0\,, \qquad \text{où } u \in H^1(\mathbb{R}^N)\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma > 0\,.$$

Il a montré aussi qu'un état fondamental est nécessairement Schwarz symétrique (modulo une translation) vu que la fonctionnelle d'énergie donnée par

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \big|\nabla u\big|^2 - \frac{1}{\sigma+2} \big|u\big|^{\sigma+2} \right\} \mathrm{d}x$$

décroît par rapport au réarrangement (autrement dit $J(u^*) \le J(u)$).

Pour l'équation différentielle plus générale

$$\Delta u(x) + g\big(|x|, u(x)\big) + \lambda u(x) = 0$$

à laquelle on associe la fonctionnelle d'énergie

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \left|\nabla u\right|^2 - G\big(|x|, u(x)\big) \right\} \mathrm{d}x \,, \qquad \text{où } G(r,s) = \int_0^s g(r,t)\,\mathrm{d}t \,, \tag{J}$$

la procédure décrite précédemment reste valide modulo l'inégalité de symétrisation

$$\int_{\mathbb{R}^N} G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \,. \tag{1.3}$$

Comme le confirmera la suite de ces notes, les applications de (1.3) ne se limitent pas à cet exemple.

Pendant l'étape de documentation consacrée à ce travail, nous avons constaté qu'il y avait deux résultats desquels on peut déduire (1.3).

Le premier est celui de Crowe, Rosenbloom et Zweibel qui ont prouvé :

Si F est une fonction continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} F(0,0) = 0 \\ F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geq 0 \qquad \text{pour tout } 0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d \,, \end{cases}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } f, g \in F(\mathbb{R}^N) \,. \tag{C.Z.R}$$

Pour les intégrands G continus, (1.3) peut être déduite de (C.Z.R) par un choix approprié de F à partir de G et de g, voir corollaire 3.1.

Ce résultat ne nous a pas donné satisfaction vu que les hypothèses de continuité sur G sont très contraignantes.

Les remarques des auteurs de [8] n'étaient guère encourageantes pour la recherche d'une méthode permettant d'avoir (C.Z.R) et par conséquent (1.3) pour des intégrands non continus.

En effet, Crowe, Rosenbloom et Zweibel ont conclu leur article en écrivant : « Toute preuve de (C.Z.R) utilisant une approximation de F par des fonctions lisses, ou de f et g par des fonctions étagées, nécessiterait des hypothèses additionnelles sur F. »!

Le deuxième résultat qui a attiré notre attention est celui de R. Tahraoui [30]. Son approche est basée sur l'approximation de G par des fonctions lisses. Ceci lui a permis de remarquer que si G est une fonction C^2 telle que $\partial_1 G$ et $\partial_1\partial_2 G$ sont négatives, alors

$$\int_\omega G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\omega^*} G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } f \in L^p_+(\omega) \,. \tag{1.4}$$

Les hypothèses de régularité sur G sont trop fortes ! Mais le résultat de densité dans [30] nous a séduit à première vue. Malheureusement, la preuve de ce résultat donnée dans le lemme 2.2 présente beaucoup de lacunes.

La communication avec Monsieur Tahraoui, au cours de laquelle nous lui avons fait part de nos remarques, n'a pas donné le résultat escompté.

Ces observations ne font que conforter Crowe, Rosenbloom et Zweibel dans leur « conjecture » et nous convaincre que toutes les méthodes qui existent jusqu'à présent ne permettent pas d'avoir (C.R.Z) et (1.3) pour des intégrands non continus.

Pour de tels intégrands, les nombreuses applications de ces inégalités de symétrisation, que nous détaillerons à la fin de ces notes, étaient un bon stimulant pour nous.

Dans notre approche, nous commençons par définir le réarrangement sur l'ensemble $E(\mathbb{R}^N)$, voir définition 2.1. Grâce au lemme 2.1, nous étendons cette définition à $F(\mathbb{R}^N)$. Cet espace contient toutes les fonctions positives appartenant à $L^p(\mathbb{R}^N)$ où $p \geq 1$. Remarquons au passage que la restriction aux fonctions positives n'est pas contraignante vu qu'on peut définir le réarrangement d'un élément f comme étant celui de $|f|$.

La réécriture des éléments de $E(\mathbb{R}^N)$ sous une forme mieux adaptée à nos objectifs, voir lemme 3.1, constitue un point clef de notre approche.

Comme première application de cette réécriture, nous avons établi le « fameux » théorème de Hardy-Littlewood d'une manière très simple pour les éléments de $E(\mathbb{R}^N)$. Le théorème de convergence monotone permet d'étendre ce résultat aux fonctions qui tendent faiblement vers zéro à l'infini.

Cette démarche reste très efficace pour montrer (1.3) pour des intégrands de Carathéodory et généraliser (C.Z.R) à des intégrands H-boréliens. Ainsi, nous avons obtenu le lemme 3.3 et le lemme 3.4.

Ensuite, nous avons tenté d'affaiblir les hypothèses de monotonie figurant dans ces deux lemmes. Pour ce faire, nous nous devions de prouver l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^N} G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

pour des intégrands boréliens.

Sur les ensembles mesurables bornés, cette égalité ($\int_\omega G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega^*} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$) a été prouvée pour de tels intégrands [22].

Sur $\mathbb{R}^N$, Loss et Lieb (voir [19]) ont prétendu que (1.5) est vraie pour tout intégrand s'exprimant comme la différence de deux fonctions monotones.

Dans la remarque 2.4, nous présentons un contre-exemple.

Les autres résultats qui existent supposent la continuité de l'intégrand G et en les utilisant, nous faisions un pas en arrière dans le contexte de (C.Z.R).

D'autre part, il n'est pas raisonnable d'espérer montrer (1.5) pour des intégrands non continus en approchant f. C'est pour cela que nous utilisons une approximation de G par des fonctions boréliennes simples (cette méthode ne semble pas aboutir si G est une fonction à plus d'une variable !). Grâce à cette démarche, nous avons obtenu le théorème 2.2 qui généralise tous les résultats existants dans ce sens et permet d'affaiblir les hypothèses des lemmes 3.3 et 3.4, voir théorèmes 3.1 à 3.5.

A partir de ces résultats, nous avons déduit les inégalités de symétrisation pour les fonctions définies sur un ensemble mesurable ayant une mesure finie, voir théorèmes 3.6 à 3.9.

Notre approche permet aussi de déterminer des hypothèses sous lesquelles on a

$$\int G\big(|x|, f_1(x), \dots, f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f_1^*(x), \dots, f_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ce qui élargit le champ d'application des inégalités de symétrisation aux problèmes variationnels vectoriels.

Au cours de nos travaux, nous avons appris grâce à B. Kawhol que F. Brock travaillait sur les mêmes problèmes de symétrisation. Les discussions que nous avons eues avec lui ont été très enrichissantes.

Dans le contexte de (C.Z.R) et (1.3), nos résultats recouvrent ceux de F. Brock.

Pour les intégrands à plus de deux variables, ils portent sur une classe de fonctions différente de celle donnée dans le théorème de F. Brock. Nous donnerons plus de précisions à la fin du chapitre 4.

Dans les trois derniers chapitres de ce travail, nous présentons quelques applications des inégalités de symétrisation démontrées aux chapitres précédents.

Au chapitre 5, nous nous intéressons au problème variationnel suivant :

$$I_c = \inf\big\{J(u) \mid u \in S_c\big\} \tag{P$_\mathrm{c}$}$$

où J est la fonctionnelle définie pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int \left|\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)u^2(x)\,\mathrm{d}x - \int F\big(|x|, u(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

et

$$S_c = \big\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid |u|_2^2 = c\big\} \qquad \text{pour } c > 0\,.$$

Pour une large classe de fonctions (p, F), nous avons prouvé dans les théorèmes 5.1 et 5.2 que I_c est atteint par une fonction positive, radiale et radialement décroissante.

Pour ce faire, nous avons commencé par montrer que, sous des hypothèses de monotonie appropriées sur p et F, on peut toujours prendre des suites minimisant (P$_\mathrm{c}$) Schwarz symétriques.

Ensuite, nous avons prouvé que J est Schwarz semi-continue inférieurement sur $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour conclure, il suffit de s'assurer que $I_c < 0$ pour $c > 0$.

Sous les hypothèses du théorème 5.1 ou du théorème 5.2, toute suite Schwarz symétrique minimisant (P$_\mathrm{c}$) est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Le but du sixième chapitre est de déterminer les hypothèses additionnelles nous permettant d'avoir cette propriété pour toute suite minimisant (P$_\mathrm{c}$).

Pour ce faire, nous avons utilisé le lemme de concentration-compacité de P.-L. Lions [20], dans lequel ce dernier donne une description des phénomènes qui interdisent à une suite de converger. Si la suite considérée est obtenue par une minimisation sous contrainte, P.-L. Lions explique d'une façon heuristique ce qu'il faut faire pour que ces phénomènes ne se produisent pas.

Dans ce cas, les éléments de la suite restent concentrés dans une certaine portion de l'espace prouvant que la suite est relativement compacte.

Par ailleurs, nous avons réussi à déterminer « concrètement » les hypothèses qui permettent d'avoir la compacité des suites minimisant (P$_\mathrm{c}$).

En effet, nous avons constaté que la négativité de I_c fait que les suites minimisantes restent loin de zéro. Ceci implique que l'évanescence donnée dans le lemme de concentration-compacité ne peut pas avoir lieu.

Pour prouver que la masse totale des éléments de la suite ne se scinde pas en deux pour réaliser le minimum, nous avons introduit le problème variationnel à l'infini.

$$I_c^\infty = \inf\bigl\{J^\infty(u) \mid u \in S_c\bigr\}\,, \tag{$\mathrm{P}_\mathrm{c}^\infty$}$$

où

$$J^\infty(u) = \frac{1}{2}\int u'^2(x)\,\mathrm{d}x - \int F^\infty\bigl(u(x)\bigr)\,\mathrm{d}x\,, \qquad F^\infty(s) = \lim_{|x|\to\infty} F\bigl(|x|, s\bigr)\,.$$

Ensuite, nous avons prouvé que les résultats du chapitre 5 permettent de déduire des informations très importantes sur I_c et I_c^∞.

Plus précisemment, sous les hypothèses du théorème 5.2, nous avons montré que

$$c \mapsto I_c \quad \text{et} \quad c \mapsto I_c^\infty \quad \text{sont continues sur } (0,\infty)\,. \tag{P1}$$

Si, en plus, F vérifie ($\mathrm{F}^\infty 1$) et p vérifie (P2), alors

$$I_c < I_c^\infty \qquad \text{pour tout } c > 0\,. \tag{P2}$$

et

$$I_c < I_a + I_{c-a}^\infty \qquad \text{pour tout } c > 0 \text{ et } a \in (0,c)\,. \tag{P3}$$

Ces propriétés sont cruciales pour prouver que la dichotomie ne peut pas avoir lieu. Ainsi, le seul cas envisageable est la compacité des suites minimisantes.

La troisième application des inégalités de symétrisation est donnée dans le dernier chapitre où nous considérons l'équation de Schrödinger suivante :

$$\begin{cases} i\partial_t\Phi + \partial_{xx}\Phi + g(\Phi) = 0 \\ \Phi(0,x) = \Phi_0(x) \end{cases} \tag{NLS}$$

où $\Phi \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$.

L'existence et l'unicité des solutions de (NLS) ont été prouvées par Cazenave et Haraux [6].

Le but du septième chapitre est d'étudier la stabilité orbitale de ces solutions.

Encore une fois, l'utilisation des inégalités de symétrisation y sera déterminante.

Organisation de la thèse

Chapitre 2

(a) Présentation d'une nouvelle façon de définir le réarrangement très efficace pour l'étude des inégalités de symétrisation.
(b) Etude des conséquences de l'équimesurabilité d'une fonction et de sa symétrisée de Schwarz.

Chapitre 3

- Exposé d'une méthode élégante grâce à laquelle nous prouvons (1.3) et (1.4) pour des opérateurs non continus.

Chapitre 4

- Généralisation des résultats des deux chapitres précédents à des intégrands à plus de deux variables. Pour ces derniers, il n'y a pas de résultat optimal. Les discussions que nous avons eues avec F. Brock sont à l'origine de la conjecture énoncée dans ce chapitre.

Chapitre 5

- Développement d'une méthode basée sur les inégalités de symétrisation permettant la résolution de certains problèmes variationnels sans compacité.

Chapitre 6

- Détermination des hypothèses grâce auxquelles nous assurons la compacité des suites minimisantes d'un problème variationnel traité dans le chapitre précédent.

Chapitre 7

- Utilisation des résultats des deux chapitres précédents pour montrer la stabilité orbitale des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire.

Notations et conventions

(C1) Si l'on ne le précise pas, on dit qu'une fonction (un ensemble) est mesurable si elle l'est (il l'est) au sens de Lebesgue.

(C2) Si A est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{mes} A$ désigne sa mesure. Si cette mesure est finie, $A^* = B(0,r)$ où $B(0,r)$ est la boule ouverte de rayon $r \geq 0$ et $V_N r^N = \operatorname{mes} A$ avec

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}\,,$$

Γ étant la fonction gamma d'Euler.

(C3) Si $u : \mathbb{R}^N \to \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^m$ est une fonction mesurable qui ne prend des valeurs infinies que sur un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^N$ que l'on note A. Si

$$g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

est telle que $g \circ u$ est mesurable sur $\mathbb{R}^N \setminus A$, il est alors facile de voir qu'il existe

$$u_m : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

mesurable telle que $u_m = u$ sur $\mathbb{R}^N \setminus A$ et par conséquent $g \circ u_m$ est mesurable sur $\mathbb{R}^N$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\big(u(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{désigne} \quad \int_{\mathbb{R}^N} g\big(u_m(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

(C4) Si l'on ne précise pas le domaine d'intégration, c'est qu'il s'agit de $\mathbb{R}^N$.

(C5) Si $M \in \mathbb{R}$, $[M]$ désigne sa partie entière.

Chapitre 2

Sur la généralisation de quelques résultats de symétrisation

2.1 Construction de la symétrisée de Schwarz

Définition 2.1. Les fonctions appropriées à la définition du réarrangement ou de la symétrisation de Schwarz sont celles qui tendent faiblement vers zéro à l'infini dans le sens suivant. Etant donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}^N$ mesurable et positive telle que $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $t > 0$, on définit sa fonction de distribution μ par

$$\mu(t) = \text{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > t\big\}\,.$$

On dit que f tend faiblement vers zéro à l'infini si

$$\mu(t) < \infty \qquad \text{pour tout } t > 0\,.$$

On note $F(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble de ces fonctions et $E(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions étagées s'écrivant sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{1}_{A_i}$$

où A_i sont des ensembles mesurables deux à deux disjoints de mesure finie et

$$0 < a_n < \ldots < a_1\,.$$

Ainsi $E(\mathbb{R}^N) \subset F(\mathbb{R}^N)$.

On commençera par définir le réarrangement des éléments de $E(\mathbb{R}^N)$. Pour généraliser cette définition aux éléments de $F(\mathbb{R}^N)$, on aura besoin du résultat suivant.

Lemme 2.1

Pour tout $f \in F(\mathbb{R}^N)$, il existe $(f_n) \subset E(\mathbb{R}^N)$ croissante telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Preuve. — Soient $f \in F(\mathbb{R}^N)$,

$$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right), \qquad \text{où } (k,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 0 \le k < n2^n,$$

$$F_n = f^{-1}\big([n, \infty)\big) \quad \text{et} \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\, \mathbf{1}_{E_{n,k}}(x) + n\, \mathbf{1}_{F_n}(x).$$

On vérifie facilement que $(f_n) \subset E(\mathbb{R}^N)$. Soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $n \in \mathbb{N}$, montrons que $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$.

- Si $f(x) < n$, il existe alors k tel que $0 \le k < n2^n$ et $x \in E_{n,k}$. Il est clair que

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1},$$

ainsi :
- si $x \in E_{n+1,2k}$, $2k/2^{n+1} \le f(x) < (2k+1)/2^{n+1}$, et alors

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} = f_{n+1}(x);$$

- si $x \in E_{n+1,2k+1}$, $(2k+1)/2^{n+1} \le f(x) < 2(k+1)/2^{n+1}$, et alors

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} < f_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

- Si x est tel que $f(x) \ge n$, alors $f_n(x) = n$; dans ce cas, on vérifie facilement que $f_{n+1}(x) \ge n = f_n(x)$. Il reste alors à prouver que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Soit x tel que $f(x) = M$, alors pour tout $n \ge n_0$, où $n_0 = [M] + 1$, on a

$$f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}.$$

Si $f(x) = \infty$, alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il vient alors que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Ainsi on a montré que, pour tout $f \in F(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite croissante de fonctions $(f_n) \subset E(\mathbb{R}^N)$ qui converge simplement vers f sur $\mathbb{R}^N$. ●

Définition 2.2. A tout $f \in E(\mathbb{R}^N)$ tel que $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbf{1}_{A_i}(x)$, on associe Sf défini sur $\mathbb{R}^N$ par

$$Sf(x) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbf{1}_{\{R_{i-1} \le |x| < R_i\}}(x)$$

où $R_0 = 0$, $R_i \ge R_{i-1}$ et $\operatorname{mes} A_i = \operatorname{mes}\big\{R_{i-1} \le |x| < R_i\big\}$.

On voit immédiatement que
- $Sf(x) \ge a_i$ si et seulement si $|x| < R_i$;
- Sf est radiale ;
- Sf est radialement décroissante, c'est-à-dire, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $|x| < |y|$, $Sf(x) \ge Sf(y)$;
- f et Sf sont équimesurables, c'est-à-dire, pour tout $t > 0$,

$$\operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > t\big\} = \operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid Sf(x) > t\big\}.$$

Lemme 2.2

L'opérateur S préserve l'ordre ; ceci équivaut à dire : si f et g sont deux éléments de $E(\mathbb{R}^N)$ tels que $f \leq g$, alors $Sf \leq Sg$.

Preuve. — Soient

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{B_j}(x) \in E(\mathbb{R}^N) .$$

$f \leq g$ implique que, pour tout i fixé, il existe j_i vérifiant $b_{j_i+1} < a_i \leq b_{j_i}$ (quitte à prendre $b_{j_i+1} = 0$).

$$Sf(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{\{R_{i-1} \leq |x| < R_i\}} \quad \text{et} \quad Sg(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{\{R'_{j-1} \leq |x| < R'_j\}} .$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

- si $Sf(x_0) = 0$, il n'y a rien à montrer ;
- si $Sf(x_0) = a_i$, alors on a nécessairement $R_{i-1} \leq |x_0| < R_i$ et

$$\begin{aligned} \operatorname{mes} B(0, R_i) &= \operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \geq a_i\big\} \leq \operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid g(x) \geq a_i\big\} \\ &\leq \operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid g(x) \geq b_{j_i}\big\} = \operatorname{mes} B(0, R'_{j_i}) . \end{aligned}$$

Ceci implique que $R_i \leq R'_{j_i}$ et par conséquent $x_0 \in B(0, R'_{j_i})$.
D'où

$$Sg(x_0) \geq b_{j_i} \geq a_i = Sf(x_0) . \bullet$$

Définition 2.3. On dit qu'un élément f de $F(\mathbb{R}^N)$ est ***Schwarz symétrique*** s'il existe $h : (0, \infty) \to [0, \infty)$ décroissante telle que

$$f(x) = h\big(|x|\big) \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^N .$$

Lemme 2.3

Soient $h, g : (0, \infty) \to [0, \infty)$ deux fonctions décroissantes et continues à droite sur $(0, \infty)$. Si pour tout $t > 0$,

$$\operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid h\big(|x|\big) > t\big\} = \operatorname{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid g\big(|x|\big) > t\big\} ,$$

alors $h(r) = g(r)$ pour tout $r \in (0, \infty)$.

Preuve. — Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $h(R) < g(R)$. Soit $t \in \big(h(R), g(R)\big)$, alors $t > 0$ et il existe $\delta > 0$ tel que $g(r) > t$ pour tout $r \leq R + \delta$. Ceci implique que

$$\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid h\big(|x|\big) > t\big\} \subset B(0, R) \qquad \text{et} \qquad B(0, R + \delta) \subset \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid g\big(|x|\big) > t\big\} ,$$

ce qui contredit l'hypothèse que l'on a faite (l'équimesurabilité) ; ainsi on doit avoir $h(r) \geq g(r)$ $\forall r > 0$.

En inversant le rôle de h et g, on obtient le résultat. $\bullet$

Proposition 2.1

Soit f un élément de $F(\mathbb{R}^N)$ Schwarz symétrique, alors il existe une unique fonction $\widetilde{f}$ de $F(\mathbb{R}^N)$ telle que :
(a) $\widetilde{f}(x) = H(|x|)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$ *où* H *est définie sur* $[0,\infty)$ *vérifiant*

$$H : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \text{ est décroissante et continue à droite}$$

$$H(0) = \lim_{s\to 0^+} H(s)\ ;$$

(b) $\widetilde{f} = f$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^N$.
Un élément de $F(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie (a) *est dit* $*$***-symétrique***.*

Preuve. — *Existence.* f étant Schwarz symétrique, il existe alors $h : (0,\infty) \to [0,\infty)$ décroissante telle que $f(x) = h(|x|)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. Par la monotonie de h, il existe un ensemble $\mathcal{D}$ de mesure nulle tel que h est continue sur $(0,\infty)\setminus\mathcal{D}$. Pour $s \geq 0$, on pose

$$H(s) = \lim_{r\to s^+} h(r)\,.$$

On vérifie facilement que H est décroissante, continue à droite sur $(0,\infty)$ et

$$H(0) = \lim_{s\to 0^+} H(s)\,.$$

Soit $\widetilde{f}(x) = H(|x|)$ alors $\widetilde{f}$ vérifie (a). D'autre part, $H = h$ sur $(0,\infty)\setminus\mathcal{D}$, ceci prouve (b). Noter que $\widetilde{f}$ est borélienne, il vient alors par (b) qu'elle appartient à $F(\mathbb{R}^N)$.

Unicité. Découle immédiatement du lemme précédent. ●

Théorème 2.1

Pour tout $f \in F(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique fonction appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$ $*$-symétrique qui lui est équimesurable. On appelle cette fonction le ***réarrangement*** *ou la* ***symétrisée de Schwarz*** *de f. On la note f^*.*

Preuve. — *Unicité.* Découle immédiatement du lemme 2.3.

Existence. Soit $f \in F(\mathbb{R}^N)$, par le lemme 2.1, il existe $\{f_n\} \subset E(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_n \leq f_{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Par le lemme 2.2, on a $Sf_n \leq Sf_{n+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$Sf(x) = \lim_{n\to\infty} Sf_n(x)\,.$$

Il est facile de voir que Sf est radiale et radialement décroissante. Sf et f sont équimesurables, puisque pour tout $t > 0$:

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^N \mid f_n(x) > t\}\,,$$

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid Sf(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^N \mid Sf_n(x) > t\}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)>t\} &= \lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N \mid f_n(x)>t\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N \mid Sf_n(x)>t\}\\ &= \operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N \mid Sf(x)>t\}\,.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\operatorname{mes}\left\{\bigcap_{n>0}\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)>n\}\right\} = \operatorname{mes}\left\{\bigcap_{n>0}\{x\in\mathbb{R}^N \mid Sf(x)>n\}\right\},$$

d'où

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=\infty\} = \operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N \mid Sf(x)=\infty\} = 0\,.$$

Vu que Sf est radiale et radialement décroissante, elle ne peut prendre la valeur ∞ qu'au point zéro.

Sf est une fonction de $F(\mathbb{R}^N)$ Schwarz symétrique.

$\widetilde{Sf}$ donnée par la proposition 2.1 a toutes les propriétés énoncées au théorème 2.1. •

Remarque 2.1. Si $f\in E(\mathbb{R}^N)$, il est facile de voir que $f^*\equiv Sf$. Si $f\in F(\mathbb{R}^N)$, en général l'égalité $(f^*\equiv Sf)$ n'est vraie que presque partout.

Noter que f^* peut être déterminée explicitement à partir de la fonction de distribution de f, voir [12].

Si $f,g\in F(\mathbb{R}^N)$ tels que $f=g$ presque partout, alors $f^*=g^*$.

Remarque 2.2. Soient $f\in F(\mathbb{R}^N)$ et (f_n) la suite donnée par le lemme 2.1, il est alors évident que

$$\int \big(f_n(x)\big)^p\,\mathrm{d}x = \int \big(f_n^*(x)\big)^p\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } p>0\,.$$

Par le théorème de convergence monotone, on a

$$\int \big(f(x)\big)^p\,\mathrm{d}x = \int \big(f^*(x)\big)^p\,\mathrm{d}x\,.$$

Il est alors naturel de chercher les conditions que doit satisfaire $G:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ pour que l'on ait

$$\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dans la suite, Φ désigne l'ensemble des intervalles de la forme $(a,b]$, (a,∞) et $\emptyset$ où $0\le a<b<\infty$. Il est facile de prouver que Φ constitue une famille élémentaire. Soit ψ la collection des réunions disjointes finies d'éléments de Φ, alors ψ est une algèbre et la σ-algèbre engendrée par ψ n'est autre que la σ-algèbre des ensembles boréliens de $(0,\infty)$ que l'on note $\sigma_{(0,\infty)}$; pour plus de détails, le lecteur peut voir [11].

2.2 Etude des conséquences de l'équimesurabilité

Lemme 2.4

Soient $f \in F(\mathbb{R}^N)$ et A un élément de ψ, alors

$$\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \in A\big\} = \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) \in A\big\}\,.$$

Preuve. — Ceci est une conséquence immédiate de (1), (2) et (5) des égalités suivantes : pour $t > 0$, $f \in F(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > t\big\} = \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) > t\big\}\,. \tag{1}$$

Par passage au complémentaire, on obtient

$$\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \leq t\big\} = \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) \leq t\big\} \qquad (= \infty)\,. \tag{2}$$

Ceci implique

$$\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) < t\big\} = \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) < t\big\} \qquad (= \infty)\,. \tag{3}$$

En effet,

$$\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) < t\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, f(x) \leq t - \frac{1}{n}\right\}$$

$$\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) < t\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, f^*(x) \leq t - \frac{1}{n}\right\}\,,$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) < t\big\} &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{mes} \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, f(x) \leq t - \frac{1}{n}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{mes} \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, f^*(x) \leq t - \frac{1}{n}\right\} \\
&= \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) < t\big\}\,.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \geq t\big\} = \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) \geq t\big\} \qquad (< \infty)\,. \tag{4}$$

Pour montrer cette égalité, il suffit de remarquer que

$$\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \geq t\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, f(x) > t - \frac{1}{n}\right\}\,.$$

$$\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > 0\big\} = \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) > 0\big\}\,. \tag{5}$$

En effet,

$$\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > 0\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, f(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

et la même égalité est vraie avec f^*, le résultat en découle vu que $\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > 0\big\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > 1/n\big\}$. ●

(3) et (4) nous ont motivés à trouver le résultat suivant.

Lemme 2.5

Soient f un élément de $F(\mathbb{R}^N)$ et A un élément de $\sigma_{(0,\infty)}$, alors

$$\operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \in A\bigr\} = \operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) \in A\bigr\}\,.$$

Preuve. — On définit sur $\sigma_{(0,\infty)}$ les fonctions

$$m(A) = \operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \in A\bigr\} \qquad \text{et} \qquad M(A) = \operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) \in A\bigr\}$$

pour tout $A \in \sigma_{(0,\infty)}$. Il est clair que m et M sont deux mesures sur $\sigma_{(0,\infty)}$. A fortiori, elles sont donc deux prémesures sur ψ, c'est-à-dire $m(\emptyset) = 0$; et si $\bigl\{A_j\bigr\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles disjoints de ψ tels que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \psi$, alors

$$m\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_j m(A_j)\,.$$

D'autre part,

$$\operatorname{mes}\left\{x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; f(x) > \frac{1}{n}\right\} < \infty \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(M vérifie bien sûr les mêmes propriétés), c'est-à-dire que m est σ-finie sur ψ (M l'est aussi). Par le théorème 1.14 de [11], il existe une unique mesure ρ sur $\sigma_{(0,\infty)}$ telle que $\rho(A) = m(A)$ pour tout $A \in \psi$. Mais m est une mesure sur $\sigma_{(0,\infty)}$, ainsi $\rho(A) = m(A)$ pour tout $A \in \sigma_{(0,\infty)}$. Ceci montre que

$$m(A) = M(A) \qquad \text{pour tout } A \in \sigma_{(0,\infty)}\,. \;\bullet$$

Remarque 2.3. Le lemme précédent ne peut pas être étendu aux boréliens de $[0,\infty)$ comme le prouve l'exemple suivant.

Soit $f : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ définie comme suit :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2^{-1/N}|x|}\,\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^N | x_N > 0\}}\,,$$

alors

$$f \in F(\mathbb{R}^N) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) = 0\bigr\} = \infty\,,$$

$$f^*(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) = 0\bigr\} = 0\,.$$

Cet exemple montre aussi que l'on ne peut pas avoir

$$\int G\bigl(f(x)\bigr)\,\mathrm{d}x = \int G\bigl(f^*(x)\bigr)\,\mathrm{d}x$$

pour toute fonction G borélienne. En effet, soit $G = \mathbf{1}_{\{0\}}$, on vérifie alors facilement que G est borélienne et que

$$\int G\bigl(f(x)\bigr)\,\mathrm{d}x = \infty \qquad \text{tandis que} \qquad \int G\bigl(f^*(x)\bigr)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

2.3 Généralisation de quelques résultats de symétrisation

Lemme 2.6

Soit $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction borélienne, alors*

$$\int_{\{x|f(x)>0\}} G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\{x|f^*(x)>0\}} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $f \in F(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. — Soit $g = G \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}$. Par quelques modifications mineures au lemme 2.1, on prouve qu'il existe une suite croissante (g_n) de fonctions boréliennes et positives définies sur $(0,\infty)$ telle que $g_n(s) \to g(s)$ pour tout $s > 0$, où

$$g_n = \sum_{i=1}^{k} a_i\,\mathbf{1}_{A_i}$$

$a_i \in (0,\infty)$ tels que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$;
A_i étant des ensembles boréliens de $(0,\infty)$ deux à deux disjoints.

$$\int_{\{x|f(x)>0\}} G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\{x|f(x)>0\}} g\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\{x|f(x)>0\}} g_n\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

par le théorème de convergence monotone. De la même façon,

$$\int_{\{x|f^*(x)>0\}} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\{x|f^*(x)>0\}} g_n\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Mais

$$\int_{\{x|f(x)>0\}} g_n\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i\,\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \in A_i\big\}$$

et

$$\int_{\{x|f^*(x)>0\}} g_n\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i\,\mathrm{mes}\big\{x \in \mathbb{R}^N \mid f^*(x) \in A_i\big\}\,.$$

Le résultat découle alors du lemme 2.5. ●

Proposition 2.2

Soit $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *une fonction borélienne, alors*

(1) $\displaystyle\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geq \int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *pour tout* $f \in F(\mathbb{R}^N)$;

(2) *si* $G(0) = 0$,

$$\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{pour tout } f \in F(\mathbb{R}^N)\,.$$

Preuve. — Rermarquons tout d'abord que

$$\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\mid f(x)>0\}} G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x + G(0)\,\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}\,.$$

Comme convenu, $G(0)\,\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}=0$ si $G(0)=0$ (même si $\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}=\infty$). De la même manière, on obtient

$$\int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\{x\mid f^*(x)>0\}} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x + G(0)\,\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)=0\big\}\,.$$

Si $G(0)=0$, le lemme précédent permet de conclure.

Si $G(0)>0$:
si $\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}=\infty$, $\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x=\infty$ et (1) est évidente ;
si $\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}<\infty$, alors on a nécessairement $\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)=0\big\}=0$ et (1) est vraie.

En effet, si $z\in\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)=0\big\}$, alors

$$f^*(x)=0 \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^N\setminus B\big(0,|z|\big)\,.$$

Ainsi

$$\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)>0\big\}\le \mathrm{mes}\,B\big(0,|z|\big)<\infty$$

et

$$\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)=0\big\}=\infty\,.$$

Par le lemme 2.4, on sait que

$$\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)>0\big\}=\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)>0\big\}\,,$$

ce qui implique que $\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}=\infty$ puisque

$$\mathbb{R}^N=\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)>0\big\}\cup\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}\,.$$

Ceci montre que $\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f^*(x)=0\big\}=\emptyset$. ●

Remarque 2.4. La preuve de (1) montre aussi que $\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x>\int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$ si $G(0)>0$ et $f\in F(\mathbb{R}^N)$ tel que $\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x<\infty$ et $\mathrm{mes}\big\{x\in\mathbb{R}^N \mid f(x)=0\big\}>0$.

Ainsi, l'égalité (3) à la page 73 dans [19] est fausse. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre f donnée dans la remarque 2.3 avec

$$\Phi_1(\text{de l'égalité (3), page 73}) = G \text{ donnée par la remarque 2.3 et } \Phi_2=0.$$

Maintenant, on va étendre (2) de la proposition 2.2 aux fonctions G qui n'ont pas forcément un signe sur tout $[0,\infty)$. Soit

$$G_+(s)=\max\big\{G(s)\,,\,0\big\} \quad \text{et} \quad G_-(s)=\max\big\{-G(s)\,,\,0\big\}$$

Si $G:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ est une fonction borélienne, alors G_+ et G_- le sont aussi et $G=G_+-G_-$.

Théorème 2.2

Soient $G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne telle que* $G(0) = 0$ *et* f *un élément de* $F(\mathbb{R}^N)$ *tel que* $\int G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *ou* $\int G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *est finie, alors*

$$\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Soit $f \in F(\mathbb{R}^N)$, (2) de la proposition 2.2 prouve que

$$\int G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G_+\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G_-\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si $\int G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty$ alors $\int G_+\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty$ et l'on a

$$\begin{aligned}\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int G_+\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int G_-\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Le même raisonnement reste valable si $\int G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty$. ●

Dans le chapitre suivant, on donnera une version de ce résultat dans le cas où f est définie sur un ensemble borné.

Remarque 2.5. Dans [17], O. Kavian démontre que $\int G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$ si G est monotone, positive, continue et $G(0) = 0$. Ces hypothèses sont beaucoup trop fortes !

En effet, on peut facilement prouver que si G est croissante, positive et $\lim_{r\to 0^+} G(r) = 0$, alors pour tout $f \in F(\mathbb{R}^N)$, $\big(G \circ f\big)^* = G \circ f^*$ presque partout.

(Remarquons que $\lim_{r\to 0^+} G(r) = 0$ est nécessaire pour que $G \circ f$ soit un élément de $F(\mathbb{R}^N)$, cette hypothèse manque dans [19] !)

Ce résultat est d'une grande importance, il implique, en particulier, que pour tout $p \geq 1$, pour tout $f \in F(\mathbb{R}^N)$:

$$\big(f^p\big)^* = \big(f^*\big)^p\,.$$

Lorsqu'on s'intéresse aux inégalités de symétrisation d'une fonction à deux variables, c'est-à-dire aux inégalités du type

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{où } F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,,$$

f et g appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$, on constate que le meilleur résultat est celui de Rosenbloom, Crowe et Zweibel. Il s'est avéré au fil des années que leur résultat est très utile surtout dans l'étude de certains problèmes variationnels sans compacité.

Pour montrer l'inégalité, les auteurs de [8] supposent, entre autres, que F est continue. Ils concluent leur article en écrivant : « Toute preuve du résultat ($\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$) utilisant une approximation de f et g par des fonctions étagées ou F par des fonctions lisses *nécessiterait* des hypothèses additionnelles sur F. » !

Dans le chapitre suivant, on va démontrer l'inégalité de symétrisation pour des fonctions F continues seulement par rapport à une variable.

Comme vous le constaterez, pour ce faire, le théorème 2.2 sera crucial.

Chapitre 3

Inégalités de symétrisation pour les intégrands H-boréliens et de Carathéodory

3.1 Motivations

Dans ce chapitre, on présente une méthode simple et élégante qui permet d'améliorer le résultat de Rosenbloom, Crowe et Zweibel en ce sens que les hypothèses de continuité de leur théorème sont affaiblies.

Rappelons tout d'abord le théorème de Rosenbloom, Crowe et Zweibel.

Soit $F : \big(\mathbb{R}_+\big)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue satisfaisant

(1) $F(0,0) = 0\,;$

(R.C.Z) $F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \geq 0$ pour tout $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$.

Alors

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } f \text{ et } g \text{ éléments de } F(\mathbb{R}^N)\,.$$

A partir de ce théorème, on déduit un résultat (qui sera généralisé plus tard) très utile dans l'étude de certains problèmes variationnels sans compacité.

En effet, on dispose du résultat suivant.

Corollaire 3.1

Soit $G : \big(\mathbb{R}_+\big)^2 \to \mathbb{R}$ *continue telle que*

(1) $\lim\limits_{t\to\infty} G(t,0) = 0$ *;*

(2) *il existe une fonction* $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*

$G(t,s) \longrightarrow g(s)$ *lorsque* $t \to \infty$ *uniformément pour* s *dans des intervalles bornés* ;

(R.C.Z.2) $G(b,d) - G(a,d) - G(b,c) + G(a,c) \leq 0$ *pour tout* $0 < a \leq b$ *et* $0 < c \leq d$.

Alors

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{pour tout } f \in F(\mathbb{R}^N)\,.$$

Preuve. — Soit

$$F(r,s)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty} G(t,s) & \text{si } r=0\\ G\left(\left(\operatorname{Log}\dfrac{1}{r}\right)^{1/2},s\right) & \text{si } 0<r\le 1\\ G(0,s) & \text{si } r\ge 1\,.\end{cases}$$

Il est clair que $F(0,0)=0$, F vérifie (R.C.Z) et est continue en tout point (r,s) où $r\neq 0$. Montrons que F est continue aux points $(0,\sigma)$ où $\sigma\ge 0$. Soit $(r_n,s_n)\to(0,\sigma)$ lorsque $n\to\infty$. Posons

$$t_n=\left(\operatorname{Log}\frac{1}{r_n}\right)^{1/2}.$$

Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $s_n\in[0,\sigma+1]$ pour tout $n\ge n_0$. Soit $\varepsilon>0$, par (2) on sait qu'il existe $T>0$ tel que

$$\big|G(t,s)-g(s)\big|<\varepsilon \qquad \text{pour tout } t>T \text{ et } s\in[0,\sigma+1]\,.$$

D'autre part, on peut trouver :

- $n_1\ge n_0$ tel que $t_n>T$ pour tout $n\ge n_1$,
- $n_2\ge n_1$ tel que $\big|g(s_n)-g(\sigma)\big|<\varepsilon$ pour tout $n\ge n_2$ puisque que g est nécessairement continue.

Ainsi,

$$\big|F(r_n,s_n)-F(0,\sigma)\big|=\big|G(t_n,s_n)-g(\sigma)\big|\le\big|G(t_n,s_n)-g(s_n)\big|+\big|g(s_n)-g(\sigma)\big|<2\varepsilon$$

pour tout $n\ge n_2$. Ceci montre que F vérifie les hypothèses du théorème précédent. Pour conclure, il suffit de prendre f un élément de $F(\mathbb{R}^N)$ et $g(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2}$. ●

Dans ce qui suit, on développe une méthode permettant :

- de généraliser le théorème de Rosenbloom, Crowe et Zweibel ;
- d'avoir l'inégalité du type

$$\int G\big(|x|,f(x)\big)\,\mathrm{d}x\le\int G\big(|x|,f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

  où G est de Carathéodory ;
- d'avoir ces inégalités de symétrisation pour des fonctions définies sur un ensemble de mesure finie.

Lemme 3.1

Soient $\{p_i\}_{1\le i\le n}$ *et* $\{q_i\}_{1\le i\le n}\subset\mathbb{R}$. *Posons*

$$\begin{array}{ll}P_i=p_i-p_{i+1} & \textit{pour } 1\le i\le n-1\\ P_n=p_n & \end{array}\qquad \textit{et}\quad Q_i=\sum_{j=1}^{i}q_j\,.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n}p_iq_i=\sum_{i=1}^{n}P_iQ_i\,.$$

Preuve. —

$$\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{j=1}^{i} q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=j}^{n} P_i = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j \,. \bullet$$

Remarque 3.1. En particulier, si f est un élément de $E(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{A_i}(x)\,,$$

alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - a_{i+1} & 1 \le i \le n-1 \\ \alpha_n = a_n & \\ f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \mathbf{1}_{A_j} = \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^{i} A_j} = \mathbf{1}_{\{f \ge a_i\}}\,. & \end{cases}$$

On conviendra de dire que f appartient à $E_2(\mathbb{R}^N)$ lorsqu'on utilise cette représentation. Ainsi

$$f_i^*(x) = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{1}_{\{R_{j-1} \le |x| < R_j\}} = \mathbf{1}_{B(0,R_i)}$$

où $R_0 = 0$, $\operatorname{mes} A_i = \operatorname{mes}\big\{R_{i-1} \le |x| < R_i\big\}$. Par le lemme précédent, on conclut facilement que

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{\{R_{i-1} \le |x| < R_i\}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^*(x)\,.$$

Il est clair qui si A est un ensemble mesurable de mesure finie, alors $\big(\mathbf{1}_A\big)^* = \mathbf{1}_{A^*}$.

Dans le lemme suivant, on propose une preuve très courte et directe du théorème de Hardy-Littlewood.

Lemme 3.2

Soient f et g deux éléments de $F(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \le \int f^*(x) g^*(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Montrons tout d'abord le résultat pour les fonctions caractéristiques. Soient $f = a\,\mathbf{1}_A$ et $g = b\,\mathbf{1}_B$, alors

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B &= \int \mathbf{1}_{A\cap B} \le \min\{\operatorname{mes} A, \operatorname{mes} B\} = \int \mathbf{1}_{A^*\cap B^*} \\ &\le \int \mathbf{1}_{A^*} \cdot \mathbf{1}_{B^*} = \int \big(\mathbf{1}_A\big)^* \cdot \big(\mathbf{1}_B\big)^*\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que le lemme est vrai pour de telles fonctions. Si f et g sont des éléments de $E_2(\mathbb{R}^N)$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \,,$$

alors

$$\begin{aligned} \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \int f_i(x) g_j(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \int f_i^*(x) g_j^*(x)\,\mathrm{d}x = \int f^*(x) g^*(x)\,\mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence monotone permet alors d'étendre le résultat aux éléments de $F(\mathbb{R}^N)$. ●

Définition 3.1. Une fonction

$$\begin{array}{rcl} F : \big(\mathbb{R}_+\big)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,s) & \longmapsto & F(r,s) \end{array}$$

est dite H***-borélienne*** en s si :

- pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $F(\,\cdot\,, s)$ est borélienne sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, $F(r, \,\cdot\,)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 3.2. Si F est H-borélienne et si f et g sont mesurables, alors $F(f,g)$ l'est aussi.

En effet, soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs positives. Soit (g_n) une suite de fonctions vérifiant :

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(x) \quad \text{et} \quad g_n(x) \to g(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \,,$$

où $c_i \in [0, \infty)$, A_i étant des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset & \text{si } i \neq j \\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \mathbb{R}^N \,. \end{cases}$$

Alors

$$F\big(f(x), g_n(x)\big) = F\left(f(x)\,, \sum_{i=1}^{m} c_i\, \mathbf{1}_{A_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} F\big(f(x), c_i\big)\, \mathbf{1}_{A_i}(x)\,.$$

On sait que $x \mapsto F\big(f(x), c_i\big)$ est mesurable (il suffit de se rappeler que si f est mesurable, g est borélienne, alors $g \circ f$ est mesurable). Ceci prouve que $F\big(f(x), g_n(x)\big)$ est mesurable ; ainsi

$$F\big(f(x), g(x)\big) = \lim_{n\to\infty} F\big(f(x), g_n(x)\big) \qquad \text{est mesurable}\,.$$

3.2 Généralisations du théorème de Rosenbloom, Crowe et Zweibel

Lemme 3.3

Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction H-borélienne en s telle que

(1) $F(\,\cdot\,, 0) \equiv 0$ *;*

(2) F *est croissante en s ;*

(3) F *vérifie (R.C.Z).*

Alors

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{pour tout } f \textit{ et } g \in F(\mathbb{R}^N)\,.$$

Preuve. — Soient $f \in F(\mathbb{R}^N)$ et $g \in E(\mathbb{R}^N)$ telle que $g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j\,\mathbf{1}_{B_j}(x)$. Ainsi

$$g^*(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j\,\mathbf{1}_{\{R_{j-1} \leq |x| < R_j\}}\,,$$

où $R_0 = 0$, $R_j \geq R_{j-1}$ et $\mathrm{mes}\big\{R_{j-1} \leq |x| < R_j\big\} = \mathrm{mes}\,B_j$. Par (1),

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{j=1}^{m} F\big(f(x), b_j\big)\,\mathbf{1}_{B_j}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le lemme 3.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{j=1}^{m} F\big(f(x), b_j\big)\,\mathbf{1}_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} \big\{F\big(f(x), b_j\big) - F\big(f(x), b_{j+1}\big)\big\}\,g_j(x)$$

où $g_j(x) = \sum_{i=1}^{j} \mathbf{1}_{B_i}(x)$ et $b_{m+1} = 0$. Ainsi,

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{j=1}^{m} \big\{F\big(f(x), b_j\big) - F\big(f(x), b_{j+1}\big)\big\}\,g_j(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour $1 \leq j \leq m$ et $r \geq 0$, on pose $\psi_j(r) = F(r, b_j) - F(r, b_{j+1})$. Il vient alors par (2) et (3) que ψ_j est positive et croissante ; ainsi

$$\ell_j = \lim_{r \to 0^+} \psi_j(r) \qquad \text{existe}$$

et en utilisant la remarque 2.5, on a

$$\big((\psi_j - \ell_j) \circ f\big)^* = (\psi_j - \ell_j) \circ f^* \qquad \text{presque partout}\,.$$

Ainsi, on obtient par le lemme 3.2 que

$$\begin{aligned}\int F\big(f(x),g(x)\big)\,\mathrm{d}x &\le \int \sum_{j=1}^{m} \big\{F\big(f^*(x),b_j\big)-F\big(f^*(x),b_{j+1}\big)-\ell_j\big\}\,g_j^*(x)+\ell_j g_j^*(x)\,\mathrm{d}x\\ &\le \int \sum_{j=1}^{m} \big\{F\big(f^*(x),b_j\big)-F\big(f^*(x),b_{j+1}\big)\big\}\,g_j^*(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

D'autre part, par (1),

$$\int F\big(f^*(x),g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{j=1}^{m} F\big(f^*(x),b_j\big)\,\mathbf{1}_{\{R_{j-1}\le|x|<R_j\}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le lemme 3.1, on a

$$\sum_{j=1}^{m} F\big(f^*(x),b_j\big)\,\mathbf{1}_{\{R_{j-1}\le|x|<R_j\}} = \sum_{j=1}^{m} \big\{F\big(f^*(x),b_j\big)-F\big(f^*(x),b_{j+1}\big)\big\}\,g_j^*(x)\,,$$

puisque $g_j^*(x)=\sum_{i=1}^{j}\mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le|x|<R_i\}}$. Par conséquent, pour tout $f\in F(\mathbb{R}^N)$ et $g\in E(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int F\big(f(x),g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int F\big(f^*(x),g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Le théorème de convergence monotone nous permet d'étendre ce résultat aux fonctions $g\in F(\mathbb{R}^N)$. ●

Théorème 3.1

Soit $F:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction H-borélienne en s telle que

(1) $F(0,0)=0$;

(2) *F est croissante en s ;*

(3) *F vérifie (R.C.Z).*

Alors, pour tout $f\in F(\mathbb{R}^N)$ tel que $\int F\big(f(x),0\big)\,\mathrm{d}x$ est finie, on a

$$\int F\big(f(x),g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int F\big(f^*(x),g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{pour tout } g\in F(\mathbb{R}^N)\,.$$

Preuve. — Posons $\widetilde{F}(r,s)=F(r,s)-F(r,0)$. $\widetilde{F}$ vérifie les hypothèses du lemme 3.3 ; ainsi

$$\int \big\{F\big(f(x),g(x)\big)-F\big(f(x),0\big)\big\}\,\mathrm{d}x \le \int \big\{F\big(f^*(x),g^*(x)\big)-F\big(f^*(x),0\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le théorème 2.2, vu que $\int F\big(f(x),0\big)\,\mathrm{d}x$ est finie, on a

$$\int F\big(f(x),0\big)\,\mathrm{d}x = \int F\big(f^*(x),0\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Ainsi, sous les hypothèses du théorème 3.1, on a

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \bullet$$

Théorème 3.2

Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction H-borélienne en s telle que

(1) $F(0,0) = 0$ *;*

(2) F *vérifie (R.C.Z.).*

Alors, pour tout f et g éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ tels que $\int F\big(f(x), 0\big)\,\mathrm{d}x$ et $\int F\big(0, g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ sont finies , on a

$$\int F\big(f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer le lemme 3.3 à

$$\widetilde{F}(r,s) = F(r,s) - F(r,0) - F(0,s)\,. \bullet$$

Il est facile de voir que le théorème 3.1 et le théorème 3.2 admettent chacun une variante (il suffit de remplaçer H-borélienne en s par H-borélienne en r).

Tous ces résultats portent sur une classe de fonctions F beaucoup plus large que celle donnée par le théorème de Rosenbloom, Crowe et Zweibel.

Corollaire 3.2

Soit φ une fonction convexe telle que $\varphi(0) = 0$, alors pour tout f et g appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ tels que $\int \varphi\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et $\int \varphi\big(-g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ sont finies, on a

$$\int \varphi\big(f^*(x) - g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int \varphi\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — On pose $F(r,s) = -\varphi(r-s)$, montrons que F vérifie (R.C.Z). Rappelons tout d'abord que si φ est convexe, si $A < B < C < D$, alors

$$\frac{\varphi(B) - \varphi(A)}{B - A} \leq \frac{\varphi(D) - \varphi(C)}{D - C}\,.$$

Il s'agit, dans notre cas, de montrer que, si $0 \leq a < b$ et $0 \leq c < d$, alors

$$\varphi(b-d) - \varphi(b-c) - \varphi(a-d) + \varphi(a-c) \leq 0\,.$$

Premier cas : $a-d<a-c\le b-d<b-c$, alors on a

$$\frac{\varphi(a-c)-\varphi(a-d)}{(a-c)-(a-d)}\le\frac{\varphi(b-c)-\varphi(b-d)}{(b-c)-(b-d)}\,.$$

Ainsi $\varphi(b-d)-\varphi(b-c)-\varphi(a-d)+\varphi(a-c)\le 0$.

Deuxième cas : $a-d<b-d\le a-c<b-c$, alors

$$\frac{\varphi(b-d)-\varphi(a-d)}{(b-d)-(a-d)}\le\frac{\varphi(b-c)-\varphi(a-c)}{(b-c)-(a-c)}$$

et l'inégalité est aussi vérifiée dans ce cas. Ainsi $F(r,s)=-\varphi(r-s)$ vérifie les hypothèses du théorème 3.2 ; par conséquent, pour tout f et g telles que $\int\varphi\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et $\int\varphi\big(-g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ sont finies, on a

$$\int\varphi(f^*-g^*)\le\int\varphi(f-g)\,.\ \bullet$$

Remarque 3.3. En posant $\varphi=\big|\cdot\big|^p$ où $p\ge 1$, on montre que l'opérateur de symétrisation est une contraction sur $F(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N)$; ceci équivaut à dire que si f et g appartiennent à $F(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int\big|f^*-g^*\big|^p\le\int\big|f-g\big|^p\qquad\text{pour tout } p\ge 1\,.$$

A partir des théorèmes 3.1 et 3.2, on peut obtenir des résultats similaires au corollaire 3.1 pour des intégrands G boréliens par rapport à la première variable et continus par rapport à la seconde.

Ces résultats peuvent être généralisés sous les mêmes hypothèses à des intégrands G de Carathéodory.

3.3 Généralisations du théorème de Brock

Définition 3.2. Une fonction $G:(0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ est dite de ***Carathéodory*** si

(1) $G(\,\cdot\,,s):(0,\infty)\to\mathbb{R}$ est mesurable sur $(0,\infty)$ pour tout $s\ge 0$ et

(2) $G(r,\,\cdot\,):[0,\infty)\to\mathbb{R}$ est continue sur $[0,\infty)$ pour tout $r\in(0,\infty)\setminus\Gamma$ où Γ est un sous-ensemble de $(0,\infty)$ de mesure nulle.

Une propriété importante d'une telle fonction est que la compostion $x\mapsto G\big(|x|,f(x)\big)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^N$ pour tout $f\in F(\mathbb{R}^N)$.

En effet, pour $f\in F(\mathbb{R}^N)$, il existe $A\subset\mathbb{R}^N$ ayant une mesure nulle tel que $0\le f(x)<\infty$ pour tout $x\in\mathbb{R}^N\setminus A$. Ainsi $G\big(|x|,f(x)\big)$ est définie et mesurable sur $\mathbb{R}^N\setminus\big[A\cup\{0\}\big]$ prouvant qu'elle est mesurable sur $\mathbb{R}^N$.

Lemme 3.4

Soit $G : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory telle que*

(1) $G(\,\cdot\,,0) \equiv 0$ *;*

(2) G *est croissante en* s *;*

(3) G *vérifie (R.C.Z.2).*

Alors pour tout f *appartenant à* $F(\mathbb{R}^N)$*, on a*

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Soit $f \in E(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathbf{1}_{A_i}(x) \qquad \text{et} \qquad f^*(x) = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le|x|<R_i\}}(x)\,.$$

Par (1), il vient

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^n G\big(|x|, a_i\big)\,\mathbf{1}_{A_i}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le lemme 3.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{i=1}^n G\big(|x|, a_i\big)\,\mathbf{1}_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^n \big\{G\big(|x|, a_i\big) - G\big(|x|, a_{i+1}\big)\big\}\,f_i(x)$$

où $f_i(x) = \sum_{\ell=1}^i \mathbf{1}_{A_\ell}(x)$ et $a_{n+1} = 0$. Ainsi

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^n \big\{G\big(|x|, a_i\big) - G\big(|x|, a_{i+1}\big)\big\}\,f_i(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour tout $1 \le i \le n$ et $r > 0$, on pose $\varphi_i(r) = G(r, a_i) - G(r, a_{i+1})$; (2) et (3) impliquent que φ_i est positive et décroissante ; ainsi

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_i(r) = \ell_i \qquad \text{existe et est finie}$$

et

$$\big(\varphi_i - \ell_i\big)^* = \varphi_i - \ell_i \qquad \text{presque partout sur } (0,\infty)\,.$$

Par le lemme 3.2, on obtient

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int \sum_{i=1}^n \big\{G\big(|x|, a_i\big) - G\big(|x|, a_{i+1}\big) - \ell_i\big\}\,f_i^*(x) + \ell_i f_i^*(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ce qui montre que

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int \sum_{i=1}^n \big\{G\big(|x|, a_i\big) - G\big(|x|, a_{i+1}\big)\big\}\,f_i^*(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

D'autre part, (1) implique que

$$\int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^{n} G\big(|x|, a_i\big)\,\mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le|x|<R_i\}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le lemme 3.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} G\big(|x|, a_i\big)\,\mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le|x|<R_i\}} = \sum_{i=1}^{n} \big\{G\big(|x|, a_i\big) - G\big(|x|, a_{i+1}\big)\big\}\, f_i^*(x)$$

puisque $f_i^*(x) = \sum_{\ell=1}^{i} \mathbf{1}_{\{R_{\ell-1}\le|x|<R_\ell\}}$. Ainsi, pour tout f appartenant à $E(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Le théorème de convergence monotone permet alors de conclure. •

Théorème 3.3

Soit $G : (0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que

(1) *il existe une fonction continue $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que*

$$N(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{r\to\infty}\big\{G(r,a) - G(r,b)\big\} \le N(a) - N(b) \quad \textit{pour tout } 0 \le a \le b\,;$$

(2) *G vérifie (R.C.Z.2) ;*

(3) $\int G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x$ *est finie.*

Alors pour tout f appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$ telle que

(3_{N}) $\int N\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ *est finie.*

On a

$$-\infty < \int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Remarque 3.4. • L'hypothèse (2) implique que, pour tout $a, b \ge 0$ tels que $a \le b$, $\big\{G(r,a) - G(r,b)\big\}$ est croissante en r ; ainsi la limite dans (1) existe.

• Si G est croissante en s, on peut choisir $N = 0$ et le théorème est vrai pour tout f appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$.

• Si $\lim_{r\to\infty} G(r,s) = G^\infty(s)$ existe sur $\mathbb{R}_+$ et est continue, alors (3) implique que $G^\infty(0) = 0$ et par conséquent l'hypothèse (1) est satisfaite en posant $N = G^\infty$.

Preuve. — (théorème 3.3) On considère $\Phi : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(r,s) = G(r,s) - G(r,0) - N(s)\,.$$

Il est évident que G est de Carathéodory et qu'elle vérifie les hypothèses (1) et (3) du lemme 3.4. Soit $0 \le a \le b$,

$$\begin{aligned}\Phi(r,a) - \Phi(r,b) &= G(r,a) - G(r,b) - \big\{N(a) - N(b)\big\} \\ &\le \lim_{r\to\infty}\big\{G(r,a) - G(r,b)\big\} - \big\{N(a) - N(b)\big\} \le 0\,.\end{aligned}$$

Il vient alors par le lemme 3.4 que

$$\int \Phi\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int \Phi\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

ce qui revient à dire que

$$\int \big\{G\big(|x|, f(x)\big) - G\big(|x|,0\big) - N\big(f(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \le \int \big\{G\big(|x|, f^*(x)\big) - G\big(|x|,0\big) - N\big(f^*(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soit $f \in F(\mathbb{R}^N)$ vérifiant l'hypothèse (3_N) ; par le théorème 2.2, on sait que

$$\int N\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int N\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty$$

et alors (3) permet de conclure que

$$-\infty < \int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \;\bullet$$

On propose maintenant une variante de nos résultats qui généralise un théorème dans [5].

Théorème 3.4

Soit $G : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que

(1) *G vérifie (R.C.Z.2) ;*

(2) *il existe une fonction mesurable a sur $(0,\infty)$ et deux constantes $b \ge 0$ et $p \ge 1$ telles que*

$$\big|G(r,s)\big| \le a(r) + bs^p \text{ pour tout } r > 0 \text{ et } s \ge 0 \quad \text{où} \quad \int_0^\infty a(r) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \text{ est finie}.$$

Alors

$$-\infty < \int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty \qquad \text{pour tout } f \in F(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)\,.$$

Remarque 3.5. Pour obtenir la conclusion du théorème 3.4 pour un élément de $F(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ $(p \geq 1)$ donné, la condition (2) peut être affaiblie. Ceci nous sera d'une grande utilité lorsqu'on s'intéresse aux inégalités de symétrisation des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$.

Soit Ω un ensemble mesurable de $[0, \infty)$ telle que

$$f(x) = f^*(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } |x| \notin \Omega\,.$$

alors l'hypothèse (2) peut être affaiblie et remplacée par

(2_S) il existe une fonction mesurable A sur Ω et une constante $b \geq 0$ telle que

$$\big|G(r,s)\big| \leq A(r) + bs^p \text{ pour tout } r \in \Omega \setminus \{0\} \text{ et } s \geq 0 \quad \text{où} \quad \int_\Omega A(r) r^{N-1}\,\mathrm{d}r < \infty\,.$$

Preuve. — (théorème 3.4) L'hypothèse (2) implique que la fonction $G\big(|\cdot|, 0\big)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. Ainsi, il suffit d'établir le résultat pour la fonction $G - G\big(|\cdot|, 0\big)$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $G\big(|\cdot|, 0\big) = 0$. Soit

$$K = \big\{f \in E(\mathbb{R}^N) \mid f \text{ a un support compact}\big\}\,.$$

On commencera par prouver le résultat pour les éléments de cet ensemble. Soit $f \in K$, il existe alors $T \notin \Gamma$ (voir définition 3.2) et S (dépendant de f) telles que

$$f(x) = f^*(x) = 0 \text{ si } |x| \geq T \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \max\big\{f(x), f^*(x)\big\} \leq S \text{ si } |x| \leq T\,.$$

Soit $\Phi : (0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(r,s) = \begin{cases} G(r,s) & \text{si } r \leq T \text{ et } s \leq S \\ G(T,s) & \text{si } r \geq T \text{ et } s \leq S \\ G(r,S) & \text{si } r \leq T \text{ et } s \geq S \\ G(T,S) & \text{si } r \geq T \text{ et } s \geq S\,. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $\Phi(r, 0) = 0$ et Φ satisfait (R.C.Z.2).

Φ est une fonction de Carathéodory car $\Phi(r, \cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est continue pour tout $r \in (0, \infty) \setminus \Gamma$. Soit

$$N(s) = \begin{cases} G(T,s) & \text{si } s \leq S \\ G(T,S) & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

N est continue sur $[0, \infty)$ et $N(0) = 0$. De plus, pour tout $a, b \in [0, \infty)$,

$$\lim_{r \to \infty} \big\{\Phi(r,a) - \Phi(r,b)\big\} = N(a) - N(b)\,.$$

Ainsi Φ satisfait l'hypothèse (1) du théorème 3.3. De plus, $N(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ puisque $f \in K$; il vient alors par le théorème 3.3 que

$$-\infty < \int \Phi\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int \Phi\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

En se rappelant que $\max\{f(x), f^*(x)\} \leq S$ et $(\operatorname{supp} f) \cup (\operatorname{supp} f^*) \subset B(0,T)$, on a

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

ce qui prouve l'inégalité pour tout $f \in K$.

Soit $f \in F(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, par le lemme 2.1, il existe une suite $\{f_n\} \subset E(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ et $f_n \to f$ sur $\mathbb{R}^N$.

Soit $V_n = f_n\,\mathbf{1}_{B(0,n)}$, alors $\{V_n\} \subset K$ et vérifie

$$0 \leq V_n \leq V_{n+1} \qquad \text{et} \qquad V_n \to f \text{ sur } \mathbb{R}^N\,.$$

Ainsi $\big|V_n - f\big|^p \leq 2^p f^p$, d'où $\{V_n\}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Il vient alors par (2) que

$$\lim_{n\to\infty} \int G\big(|x|, V_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \tag{S1}$$

(Remarquer que dans le contexte (2_{S}), $f_n = V_n = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $|x| \notin \Omega$.) D'autre part, par le lemme 2.2, on sait que

$$0 \leq V_n^* \leq V_{n+1}^* \leq Sf \qquad \text{où } Sf(x) = \lim_{n\to\infty} V_n^*(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N\,,$$

$Sf = f^*$ presque partout (voir preuve du théorème 2.2) et, par la proposition 2.2,

$$\int \big(f^*(x)\big)^p\,\mathrm{d}x = \int \big(f(x)\big)^p\,\mathrm{d}x = \int \big(Sf(x)\big)^p\,\mathrm{d}x\,.$$

Ceci implique que $V_n^* \to f^*$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. En appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int G\big(|x|, V_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \tag{S2}$$

Puisque $V_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par (S1) et (S2), on a

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \bullet$$

Théorème 3.5

Soit G vérifiant :

(1) $G \in C^2\big([0,\infty) \times [0,\infty)\big)$ *et* $\partial_1\partial_2 G(r,s) \leq 0$ *pour tout* r *et* $s \geq 0$ *;*

(2) *il existe une fonction mesurable* a *sur* $(0,\infty)$ *et deux constantes* $b \geq 0$ *et* $p \geq 1$ *telles que*

$$\big|G(r,s)\big| \leq a(r) + bs^p \textit{ pour tout } r \textit{ et } s \geq 0 \quad \textit{où} \quad \int_0^\infty a(r) r^{N-1}\,\mathrm{d}r \textit{ est finie}.$$

Alors

$$-\infty < \int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty \qquad \textit{pour tout } f \in F(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)\,.$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que si $G \in C^2\big([0,\infty) \times [0,\infty)\big)$, alors

$$G \text{ vérifie (R.C.Z.2)} \iff \partial_1\partial_2 G(r,s) \leq 0 \qquad \text{pour tout } r \text{ et } s \geq 0\,. \bullet$$

3.4 Inégalités de symétrisation sur les ensembles mesurables ayant une mesure finie

Il est important d'examiner l'équivalent des inégalités (et égalités) de symétrisation démontrées précédemment lorsqu'on considère des fonctions définies sur un ensemble de mesure finie à la place des fonctions définies sur tout l'espace et tendant faiblement vers zéro à l'infini.

Les égalités de symétrisation pour de telles fonctions ont été largement étudiées, voir [1], [18] et [22] qui a obtenu le meilleur résultat. Ce dernier peut être vu comme une conséquence du théorème 3.6.

Commençons tout d'abord par définir le réarrangement (ou la symétrisée de Schwarz) des fonctions définies sur un ensemble de mesure finie.

Définition 3.3. Soit ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ ayant une mesure finie. On désigne par $M^+(\omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables positives définies sur ω telles que $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \omega$. Soit f un élément de cet ensemble, on définit $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f} = f \cdot \mathbf{1}_\omega \textit{ et } f^* \textit{ comme étant la restriction de } \big(\tilde{f}\big)^* \textit{ à } \omega^* .$$

Ainsi f^* est radiale et radialement décroissante.

On a aussi $\big(\tilde{f}\big)^* = 0$ si $x \notin \omega^*$ (c'est une conséquence immédiate du fait que $\big(\tilde{f}\big)^*$ est $*$-symétrique et que $\operatorname{mes}\omega = \operatorname{mes}\omega^*$), ce qui implique que f et f^* sont équimesurables d'où, pour tout $t \geq 0$,

$$\operatorname{mes}\big\{x \in \omega \mid f(x) > t\big\} = \operatorname{mes}\big\{x \in \omega^* \mid f^*(x) > t\big\} .$$

On va montrer maintenant que sur les ensembles de mesure finie, $G(0) = 0$ n'est plus nécessaire pour avoir l'égalité démontrée au théorème 2.2.

Théorème 3.6

Soit $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne, alors*

$$\int_\omega G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega^*} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $f \in M^+(\omega)$ *tel que*

$$\int_\omega G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \textit{ou} \quad \int_\omega G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \textit{est finie}.$$

Preuve. — Soient $g(s) = G(s) - G(0)$ et $f \in M^+(\omega)$. Il vient alors par le théorème 2.2 que

$$\int g\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int g\left(\big(\tilde{f}\big)^*(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

si $\int g_+\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x$ ou $\int g_-\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x$ est finie. Mais

$$\begin{aligned} g_+(s) &= \max\big\{G(s) - G(0), 0\big\} \leq \max\big\{G_+(s) + G_-(0), 0\big\} \\ &\leq G_+(s) + G_-(0) . \end{aligned}$$

Puisque $g(0) = 0$,

$$\int g_+\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_\omega g_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int_\omega G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x + G_-(0)\operatorname{mes}\omega\,.$$

Ceci montre que si $\int_\omega G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ est finie, alors $\int g_+\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi. Dans ce cas,

$$\int g\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int g\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int g\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int g\Big(\big(\tilde{f}\big)^*(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

et par conséquent

$$\int_\omega G\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega^*} G\big(f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si $\int_\omega G_+\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \infty$, alors $\int_\omega G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ est finie. Mais

$$g_-(s) = \max\big\{-G(s) + G(0), 0\big\} \le \max\big\{G_-(s) + G_+(0), 0\big\} \le G_-(s) + G_+(0)\,.$$

D'où

$$\int g_-\big(\tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_\omega g_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int_\omega G_-\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x + G_+(0)\operatorname{mes}\omega < \infty\,.$$

La preuve peut être complétée comme dans le cas précédent. ●

Théorème 3.7

Soit ω un ensemble mesurable borné et $G : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que

(1) *G vérifie (R.C.Z.2) ;*

(2) $\displaystyle\int_\omega G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\omega^*} G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$

Alors pour tout $f \in M^+(\omega)$ tel qu'il existe $r_\omega > 0$ vérifiant $|x| \le r_\omega$ pour tout $x \in \omega$ et $\int_\omega G\big(r_\omega, f(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty$, on a

$$-\infty < \int_\omega G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\omega^*} G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — On pose

$$\widetilde{G}(r,s) = \begin{cases} G(r,s) - G(r_\omega, s) + G(r_\omega, 0) - G(r, 0) & \text{si } r \le r_\omega \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

On montre facilement que $\widetilde{G}$ vérifie les hypothèses du lemme 3.4. Ainsi

$$\int \widetilde{G}\big(|x|, \tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int \widetilde{G}\left(|x|, (\tilde{f})^*(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

où $f \in M^+(\omega)$. D'où

$$\int_\omega \left\{G\big(|x|, f(x)\big) - G\big(r_\omega, f(x)\big) + G\big(r_\omega, 0\big) - G\big(|x|, 0\big)\right\}\,\mathrm{d}x$$
$$\le \int_{\omega^*} \left\{G\big(|x|, f^*(x)\big) - G\big(r_\omega, f^*(x)\big) + G\big(r_\omega, 0\big) - G\big(|x|, 0\big)\right\}\,\mathrm{d}x\,.$$

Etant donné que $\int_\omega G\big(r_\omega, f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ est finie, il vient alors par le théorème précédent que

$$\int_\omega G\big(r_\omega, f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega^*} G\big(r_\omega, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

(2) permet alors de conclure. ●

Théorème 3.8

Soit $G : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory vérifiant

(1) *il existe une fonction $N : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continue telle que*

$$\lim_{r\to\infty} \big\{G(r,a) - G(r,b)\big\} \le N(a) - N(b) \qquad \textit{pour tout } 0 \le a \le b\,;$$

(2) *G vérifie (R.C.Z.2) ;*

(3) $\displaystyle\int_\omega G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\omega^*} G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$

Alors pour tout $f \in M^+(\omega)$ tel que $\int_\omega N\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ est finie, on a

$$-\infty < \int_\omega G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\omega^*} G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer le lemme 3.4 à $\widetilde{G}(r,s) = G(r,s) - G(r,0) - N(s) + N(0)$ et $\tilde{f} = f \cdot \mathbf{1}_\omega$. ●

Théorème 3.9

Soit $G : (0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que

(1) *G vérifie (R.C.Z.2) ;*

(2) $\displaystyle\int_\omega G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\omega^*} G\big(|x|, 0\big)\,\mathrm{d}x\,;$

(3) *il existe une fonction mesurable* A *sur* $\Omega = \{|x| \mid x \in \omega \cup \omega^*\}$ *et deux constantes* $b \geq 0$ *et* $p \geq 1$ *telles que*

$$\big|G(r,s)\big| \leq A(r) + bs^p \text{ pour tout } r \in \Omega \setminus \{0\} \text{ et } s \geq 0 \quad \text{où} \quad \int_\Omega A(r) r^{N-1}\,\mathrm{d}r < \infty\,.$$

Alors

$$-\infty < \int_\omega G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\omega^*} G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty$$

pour tout $f \in L^p_+(\omega) = M^+(\omega) \cap L^p(\omega)$.

Preuve. — Soit $\Phi(r,s) = G(r,s) - G(r,0)$. Pour tout $f \in L^p_+(\omega)$, il est clair que $\tilde{f} \in F(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ et que

$$\tilde{f}(x) = \big(\tilde{f}\big)^*(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ et } |x| \notin \Omega\,.$$

Ainsi Φ vérifie l'hypothèse (2_{S}) de la remarque 3.5 ; $\Phi : (0,\infty) \times [0,\infty)$ est une fonction de Carathéodory vérifiant (R.C.Z.2). Ainsi, il vient par la remarque 3.5 que

$$-\infty < \int \Phi\big(|x|, \tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int \Phi\left(|x|, \big(\tilde{f}\big)^*(x)\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

Puisque $\Phi(r,0) = 0$, on a

$$\int \Phi\big(|x|, \tilde{f}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_\omega \big\{G\big(|x|, f(x)\big) - G\big(|x|, 0\big)\big\}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int \Phi\left(|x|, \big(\tilde{f}\big)^*(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\omega^*} \big\{G\big(|x|, f^*(x)\big) - G\big(|x|, 0\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,.$$

D'autre part, $\big|G(r,0)\big| \leq A(r)$, d'où $G\big(|x|,0\big)$ est intégrable sur ω et sur ω^*.

Par (2), on a alors le résultat. ●

Remarque 3.6. Tous nos résultats améliorent ceux énoncés dans [30] et [31].

Chapitre 4

Inégalités de symétrisation des fonctions à plus de deux variables

Comme on le montrera dans les chapitres suivants, dans certains problèmes variationnels sans compacité, les inégalités de symétrisation que l'on a montrées sont déterminantes pour affirmer que le minimum est atteint.

Le but de ce chapitre est de généraliser l'inégalité de symétrisation

$$\int G\big(|x|, f(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

à

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

où f et g sont deux éléments de $F(\mathbb{R}^N)$. Ceci nous permet d'étendre les méthodes de résolution de certains problèmes variationnels scalaires aux problèmes variationnels vectoriels (voir chap. 5).

4.1 Inégalités de symétrisation des fonctions à plus de deux variables

Lemme 4.1

(Généralisation du théorème de Hardy-Littlewood) Soient f, g et h trois éléments de $F(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int f(x)\,g(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x \leq \int f^*(x)\,g^*(x)\,h^*(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Montrons tout d'abord le résultat pour les fonctions caractéristiques. Soient $f = a\,\mathbf{1}_A$, $g = b\,\mathbf{1}_B$ et $h = c\,\mathbf{1}_C$,

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C = \int \mathbf{1}_{A\cap B\cap C} &\leq \min\{\operatorname{mes} A, \operatorname{mes} B, \operatorname{mes} C\} \\
&\leq \int \mathbf{1}_{A^*\cap B^*\cap C^*} = \int \mathbf{1}_{A^*} \cdot \mathbf{1}_{B^*} \cdot \mathbf{1}_{C^*} \\
&\leq \int (\mathbf{1}_A)^* \cdot (\mathbf{1}_B)^* \cdot (\mathbf{1}_C)^*
\end{aligned}$$

et par conséquent le lemme est vrai pour de telles fonctions. Si f, g et h sont des éléments de $E_2(\mathbb{R}^N)$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\,, \qquad g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \quad \text{et} \quad h = \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k h_k\,,$$

alors

$$\int fgh = \sum_{i,j,k} \alpha_i \beta_j \gamma_k \int f_i g_j h_k \leq \sum_{i,j,k} \alpha_i \beta_j \gamma_k \int f_i^* g_j^* h_k^* = \int f^* g^* h^*\,.$$

Le théorème de convergence monotone permet alors d'étendre le résultat aux éléments de $F(\mathbb{R}^N)$. ●

Lemme 4.2

Soit

$$\begin{array}{rcl} G : (\mathbb{R}_+)^* \times (\mathbb{R}_+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r, s_1, s_2) & \longmapsto & G(r, s_1, s_2) \end{array}$$

une fonction telle que $G(\,\cdot\,, s_1, s_2)$ *est mesurable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *pour tout* s_1 *et* $s_2 \geq 0$ *et* $G(r, \,\cdot\,, s_2)$ *et* $G(r, s_1, \,\cdot\,)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}_+$ *pour presque tout* $r > 0$ *et tout* $s_2 \geq 0$ *(resp. tout* $s_1 \geq 0$*). Dans le contexte de ce chapitre, une telle fonction est dite* 2-***Carathéodory****. Supposons que*

(1) $G(\,\cdot\,, \,\cdot\,, 0) = G(\,\cdot\,, 0, \,\cdot\,) \equiv 0$ *;*

(2) $(s_1, s_2) \mapsto G(r, s_1, s_2)$ *vérifie (R.C.Z.) ;*

(3) $$\begin{aligned} &G(A,B,C) - G(A,B,c) - G(A,b,C) + G(A,b,c) \\ &\quad \leq G(a,B,C) - G(a,B,c) - G(a,b,C) + G(a,b,c) \end{aligned}$$

pour tout $0 < a \leq A$, $0 \leq b \leq B$ *et* $0 \leq c \leq C$.

Alors pour tout f *et* g *éléments de* $F(\mathbb{R}^N)$*, on a*

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Soient f et g deux éléments de $E(\mathbb{R}^N)$ tels que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathbf{1}_{A_i}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \mathbf{1}_{B_j}(x)\,.$$

Par (1), on obtient

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^{n} G\big(|x|, a_i, g(x)\big)\, \mathbf{1}_{A_i}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le lemme 3.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} G\big(|x|, a_i, g(x)\big)\, \mathbf{1}_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \big\{G\big(|x|, a_i, g(x)\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, g(x)\big)\big\}\, f_i(x)$$

où $f_i(x) = \sum_{\ell=1}^{i} \mathbf{1}_{A_\ell}(x)$ et $a_{n+1} = 0$. Ainsi, on obtient

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^{n} \big\{G\big(|x|, a_i, g(x)\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, g(x)\big)\big\}\, f_i(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Utilisons à nouveau (1), on a alors

$$\begin{aligned}\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big)\big\}\, f_i(x)\,\mathbf{1}_{B_j}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \sum_{j=1}^{m} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big)\big\}\,\mathbf{1}_{B_j}(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big)\big\}\,\mathbf{1}_{B_j}(x)\\ &\quad= \sum_{j=1}^{m} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_i, b_{j+1}\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big) + G\big(|x|, a_{i+1}, b_{j+1}\big)\big\}\, g_j(x)\end{aligned}$$

où $g_j(x) = \sum_{k=1}^{j} \mathbf{1}_{B_k}(x)$ et $b_{m+1} = 0$, on a

$$\begin{aligned}&\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_i, b_{j+1}\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big) + G\big(|x|, a_{i+1}, b_{j+1}\big)\big\}\, f_i(x) g_j(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Pour $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ et $r > 0$, on pose

$$\psi_{i,j}(r) = G\big(r, a_i, b_j\big) - G\big(r, a_i, b_{j+1}\big) - G\big(r, a_{i+1}, b_j\big) + G\big(r, a_{i+1}, b_{j+1}\big)\,.$$

(2) et (3) impliquent que $\psi_{i,j}$ est positive et décroissante ; ainsi $\ell_{i,j} = \lim_{r\to+\infty} \psi_{i,j}(r)$ existe et est finie.

Par le lemme 4.1, il vient que

$$\begin{aligned}&\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &\le \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Big(\big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_i, b_{j+1}\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big) + G\big(|x|, a_{i+1}, b_{j+1}\big)\big\} - \ell_{i,j}\Big)\\ &\qquad\qquad \cdot f_i^*(x) g_j^*(x) + \ell_{i,j} f_i^*(x) g_j^*(x)\,\mathrm{d}x\\ &\le \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_i, b_{j+1}\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big) + G\big(|x|, a_{i+1}, b_{j+1}\big)\big\}\, f_i^*(x) g_j^*(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Soit $f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le|x|<R_i\}}$, il vient que

$$\int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^{n} G\big(|x|, a_i, g^*(x)\big)\,\mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le|x|<R_i\}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le lemme 3.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} G\big(|x|, a_i, g^*(x)\big)\, \mathbf{1}_{\{R_{i-1}\le |x| < R_i\}} = \sum_{i=1}^{n} \big\{G\big(|x|, a_i, g^*(x)\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, g^*(x)\big)\big\}\, f_i^*(x)$$

puisque $f_i^*(x) = \sum_{\ell=1}^{i} \mathbf{1}_{\{R_{\ell-1}\le|x|<R_\ell\}}$. En refaisant la même chose pour g^*, on a

$$\begin{aligned}&\int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \big\{G\big(|x|, a_i, b_j\big) - G\big(|x|, a_i, b_{j+1}\big) - G\big(|x|, a_{i+1}, b_j\big) + G\big(|x|, a_{i+1}, b_{j+1}\big)\big\}\, f_i^*(x) g_j^*(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que, pour tout f et g appartenant à $E(\mathbb{R}^N)$,

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que (1) et (2) impliquent que G est croissante en s_1 et s_2 et qu'elle est positive.

Par le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

pour tout f et g appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$. ●

Remarque 4.1. (1) et (3) impliquent que $(r, s_1) \longrightarrow G(r, s_1, s_2)$ et $(r, s_2) \longrightarrow G(r, s_1, s_2)$ vérifient (R.C.Z.2).

Si $G \in C^3\big((\mathbb{R}_+)^3\big)$, alors (2) est équivalent à $\partial_2\partial_3 G(r, s_1, s_2) \ge 0$ pour tout r, s_1 et $s_2 \ge 0$ et (3) est équivalent à $\partial_1\partial_2\partial_3 G(r, s_1, s_2) \le 0$ pour tout r, s_1 et $s_2 \ge 0$.

Théorème 4.1

Soit $G : (\mathbb{R}_+)^* \times (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$ une fonction 2-Carathéodory telle que

(1) $(r, s_1) \longmapsto G(r, s_1, s_2)$ *et* $(r, s_2) \longmapsto G(r, s_1, s_2)$ *vérifient (R.C.Z.2) ;*

(2) $(s_1, s_2) \longmapsto G(r, s_1, s_2)$ *vérifie (R.C.Z) ;*

(3) $$\begin{aligned}&G(A, B, C) - G(A, B, c) - G(A, b, C) + G(A, b, c)\\ &\qquad \le G(a, B, C) - G(a, B, c) - G(a, b, C) + G(a, b, c)\end{aligned}$$

pour tout $0 < a \le A$, $0 \le b \le B$ *et* $0 \le c \le C$ *;*

(4) $\displaystyle\int G\big(|x|, 0, 0\big)\,\mathrm{d}x$ *est finie ;*

(5) $s_1 \longmapsto \lim\limits_{r\to\infty} G(r, s_1, 0)$ *et* $s_2 \longmapsto \lim\limits_{r\to\infty} G(r, 0, s_2)$ *existent et sont continues de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$.

Alors pour tout f, g éléments de $F(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} \int \lim_{r\to\infty} G\big(r, f(x), 0\big)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int \lim_{r\to\infty} G\big(r, 0, g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int G\big(|x|, f^*(x), 0\big)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int G\big(|x|, 0, g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \qquad \textit{sont finies}\,, \tag{f-g}$$

on a

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Posons $\widetilde{G}(r,s_1,s_2) = G(r,s_1,s_2) - G(r,s_1,0) - G(r,0,s_2) + G(r,0,0)$, alors $\widetilde{G}$ vérifie les hypothèses du lemme 4.2, par conséquent

$$\int \widetilde{G}\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int \widetilde{G}\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

ce qui revient à dire que

$$\begin{aligned} &\int \big\{G\big(|x|, f(x), g(x)\big) - G\big(|x|, f(x), 0\big) - G\big(|x|, 0, g(x)\big) + G\big(|x|, 0, 0\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\ &\quad\le \int \big\{G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big) - G\big(|x|, f^*(x), 0\big) - G\big(|x|, 0, g^*(x)\big) + G\big(|x|, 0, 0\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Vu que $\int G\big(|x|,0,0\big)\,\mathrm{d}x$ est finie,

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

si l'on a

$$\begin{array}{l} \int G\big(|x|, f(x), 0\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), 0\big)\,\mathrm{d}x < \infty \\ \text{et} \\ \int G\big(|x|, 0, g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, 0, g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,. \end{array} \tag{$*$}$$

(5), (4), (1) et (f-g) permettent d'appliquer le théorème 3.3 à

$$\big((r,s_1) \to G(r,s_1,0)\,,\ f\big) \qquad \text{et} \qquad \big((r,s_2) \to G(r,0,s_2)\,,\ g\big)\,.$$

Ainsi $(*)$ est vérifiée et

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \ \bullet$$

Remarque 4.2. Il y a plusieurs variantes du théorème précédent, puisque pour que $(*)$ soit vraie, on peut utiliser une version plus générale du théorème 3.3 ou le théorème 3.4.

4.2 Notre conjecture

Très récemment, F. Brock a démontré le résultat suivant (voir [5]).

Si $G : (\mathbb{R}_+)^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant les hypothèses (1) et (2) du théorème 4.1 et telle que

$$\big|G(r, s_1, s_2)\big| \leq c \sum_{i=1}^{2} s_i^p + g(r) \qquad \text{pour tout } r,\ s_1 \text{ et } s_2 \geq 0$$

où $p \in [1, \infty)$, $c > 0$ et $\int_0^\infty g(r) r^{N-1}\, \mathrm{d}r < \infty$, alors pour tout f et g éléments de $F(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\, \mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Ce résultat porte sur une classe de fonctions différente de celle donnée dans le théorème 4.1.

Les discussions que l'on a eues avec F. Brock nous ont permis d'affaiblir les hypothèses de croissance ($\big|G(r, s_1, s_2)\big| \leq c \sum_{i=1}^{2} s_i^p + g(r)$) de son théorème.

Ceci est d'un grand intérêt. En effet, lorsqu'on s'intéresse à l'application d'une telle inégalité de symétrisation dans les problèmes variationnels définis sur $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ où apparait l'intégrand G, les hypothèses de croissance du théorème de Brock assurent que l'on travaille avec des intégrales finies pour toute fonction f et $g \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap F(\mathbb{R}^N)$. Elles ne prennent aucunement en considération l'appartenance des fonctions à l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ mais seulement à $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Elles ne sont sûrement pas nécessaires vu que l'on peut utiliser des hypothèses de croissance beaucoup plus générales permettant de traiter le cas où G a un comportement en $|s|^m$ en zéro et $|s|^n$ à l'infini avec $n \neq m$ et les injections de Sobolev pour prouver que le problème variationnel est bien posé (voir chap. 5).

En utilisant notre approche qui consiste, entre autres, à utiliser le théorème de convergence monotone au lieu du théorème de convergence dominée (ceci permet d'avoir des résultats plus flexibles), on obtient le résultat suivant : si $G : (\mathbb{R}_+)^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant l'hypothèse (1), (2), (4) et (5) du théorème 4.1, alors pour tout f, g appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$ et vérifiant (f-g) on a

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\, \mathrm{d}x \leq \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Preuve. — Remarquons tout d'abord que sans l'hypothèse de croissance, F. Brock a montré que son résultat est vrai pour tout f et g appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap F(\mathbb{R}^N)$.

(F.H) Supposons que G soit croissante en s_1 et s_2 et positive.

Soit f et g appartenant à $F(\mathbb{R}^N)$, par le lemme 2.1, il existe (f_n) et (g_n) telles que
- $f_n \leq f_{n+1}$ et $f_n \to f$ sur $\mathbb{R}^N$,
- $g_n \leq g_{n+1}$ et $g_n \to g$ sur $\mathbb{R}^N$,
- (f_n) et (g_n) sont incluses dans $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap F(\mathbb{R}^N)$.

Il vient alors par le théorème de F. Brock que

$$\int G\big(|x|, f_n(x), g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f_n^*(x), g_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

et par le théorème de convergence monotone :

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si G ne vérifie pas (F.H), on pose

$$\widetilde{G}(r, s_1, s_2) = G(r, s_1, s_2) - G(r, s_1, 0) - G(r, 0, s_2) + G(r, 0, 0)$$

qui satisfait cette hypothèse. Ainsi

$$\int \widetilde{G}\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int \widetilde{G}\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\int \big\{G\big(|x|, f(x), g(x)\big) - G\big(|x|, f(x), 0\big) - G\big(|x|, 0, g(x)\big) + G\big(|x|, 0, 0\big)\big\}\,\mathrm{d}x\\ &\quad\le \int \big\{G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big) - G\big(|x|, f^*(x), 0\big) - G\big(|x|, 0, g^*(x)\big) + G\big(|x|, 0, 0\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

(5), (4), (1) et (f-g) permettent alors d'affirmer que

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.\bullet$$

Les hypothèses de continuité dans le théorème de F. Brock ne peuvent pas être enlevées.

Tout porte à croire qu'une combinaison du théorème de F. Brock et du théorème 4.1 donnerait un résultat optimal. Ceci revient à dire que, sous les hypothèses du théorème 4.1, hypothèse (3) exclue, on aurait

$$\int G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,?$$

Les techniques que l'on a développées au chapitre précédent permettent d'avoir plusieurs résultats sur l'inégalité

$$\int_\omega G\big(|x|, f(x), g(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int_{\omega^*} G\big(|x|, f^*(x), g^*(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

où f et g appartiennent à $M^+(\omega)$. Elles permettent aussi de déterminer des hypothèses sous lesquelles on a

$$\int G\big(|x|, f_1(x), \dots, f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \int G\big(|x|, f_1^*(x), \dots, f_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Quoiqu'il porte sur une classe de fonctions intéressante et large, on a de bonnes raisons de croire que le théorème 4.1 est vrai sans l'hypothèse (3).

C'est pour cela que l'on pense qu'il vaut mieux passer à sa généralisation une fois que l'on aura bien compris comment « se débarrasser » de cette hypothèse ?

Chapitre 5

Fonctionnelles Schwarz semi-continues inférieurement

Dans ce chapitre, on se propose de déterminer une classe de fonctions G pour laquelle l'infimum de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \int G\big(|x|, u(x)\big) \, \mathrm{d}x \,,$$

où u est dans une contrainte, est atteint.

La méthode classique que l'on suit pour « attraper le minimum » d'un tel problème variationnel consiste à montrer que J est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement, ce qui nécessite des hypothèses contraignantes sur G telles que la concavité ou la compacité.

Dans le cas où il y a manque de compacité, on développera une méthode permettant de minimiser la fonctionnelle sous la contrainte.

En effet, grâce à des hypothèses de monotonie sur G, on montrera, par le biais des inégalités de symétrisation, que l'on peut prendre des suites minimisantes $*$-symétriques.

L'utilisation des propriétés de ces dernières est cruciale pour prouver que l'infimum est atteint.

Grâce au théorème 4.1, on généralisera cette méthode de résolution aux problèmes variationnels vectoriels.

5.1 Application des inégalités de symétrisation dans un problème variationnel sans compacité

Dans la suite, $|\cdot|_2$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour $c > 0$,

$$S_c = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \;\Big|\; |u|_2^2 = c \Big\} \,.$$

On s'intéresse au problème variationnel suivant :

$$I_c = \inf_{u \in S_c} J(u) \qquad (\mathrm{P_c})$$

où J est définie sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)\, u^2(x) \, \mathrm{d}x - \int F\big(|x|, u(x)\big) \, \mathrm{d}x \,.$$

Supposons que $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifie :

(P1) p est positive, décroissante et $\lim_{r\to\infty} p(r) = 0$;

(P2) • si $N = 1, 2$, il existe $a \in (0, 1]$ tel que $p(a) > 0$;

• si $N \geq 3$, il existe $R > 0$ tel que $p(R) > \dfrac{j^2_{N/2-1,1}}{R^2}$

où $j_{N/2-1,1}$ est le premier zéro de la fonction de Bessel $J_{N/2-1}$

et $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que

(F0) F est de Carathéodory, et

$$F(r, s) \leq F\bigl(r, |s|\bigr) \qquad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}_+^*\,,\ s \in \mathbb{R}\,.$$

Supposons que pour tout $r > 0$ et $s \geq 0$, on a

(F1) $0 \leq F(r, s) \leq K(s^2 + s^{\ell+2})$ où $K \geq 0$ et $0 < \ell < 4/N$;

(F2) F vérifie (R.C.Z.2) ;

(F3) $\forall\varepsilon > 0$, $\exists R_0 > 0$ et $S_0 > 0$ tels que

$$F(r, s) \leq \varepsilon s^2 \qquad \text{pour tout } r \geq R_0 \text{ et } s \leq S_0\ ;$$

(F4) $F(r, \theta s) \geq \theta^2 F(r, s)$ pour tout $\theta \geq 1$.

Alors on a le résultat suivant.

Théorème 5.1

Si p vérifie (P1) et (P2), F vérifie (F0)→(F4), alors : pour tout $c > 0$, il existe u_c $*$-symétrique appartenant à S_c telle que $J(u_c) = I_c$.

Remarque 5.1.

• (F1) et (F4) impliquent que F est croissante en s (pour $s \geq 0$).

• (F1) implique que $F(r, 0) = 0$ pour tout $r > 0$.

• Si F vérifie (F0) et (F1), p vérifie (P1), alors le problème variationnel ($\mathrm{P_c}$) est bien posé et toute suite minimisant ($\mathrm{P_c}$) est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

En effet, soit $u \in S_c$, par (F0) et (F1), on a

$$\int F\bigl(|x|, u(x)\bigr)\,\mathrm{d}x \leq Kc + K \int \bigl|u(x)\bigr|^{\ell+2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on a

$$\bigl|u\bigr|_{\ell+2} \leq c_1 \bigl|u\bigr|_2^{1-\sigma} \cdot \bigl|\nabla u\bigr|_2^{\sigma} \qquad \text{où } \sigma = \frac{N}{2}\,\frac{\ell}{\ell+2}\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $p = 4/N\ell$ et q tel que $1/p + 1/q = 1$. Il vient alors par l'inégalité de Young que

$$\begin{aligned} |u|_{\ell+2}^{\ell+2} &\leq \left\{ \frac{c_1^{\ell+2}|u|_2^{(1-\sigma)(\ell+2)}}{\varepsilon} \right\}^q \cdot \frac{1}{q} + \frac{N\ell}{4} \left\{ \varepsilon |\nabla u|_2^{N\ell/2} \right\}^{4/N\ell} \\ &\leq \left\{ \frac{c_1^{\ell+2}}{\varepsilon} |u|_2^{(1-\sigma)(\ell+2)} \right\}^q \cdot \frac{1}{q} + \frac{N\ell}{4} \left\{ \varepsilon^{4/N\ell} |\nabla u|_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$J(u) \geq \left\{ \frac{1}{2} - K\varepsilon^{4/N\ell} \cdot \frac{N\ell}{4} \right\} |\nabla u|_2^2 - \frac{1}{2} p(0)c - Kc - \frac{K}{q} \left\{ \frac{c_1^{\ell+2} c^{(1-\sigma)(\ell+2)/2}}{\varepsilon} \right\}^q.$$

Pour montrer que J est bornée inférieurement, il suffit de prendre ε tel que

$$\frac{1}{2} - \frac{N\ell}{4} K\varepsilon^{4/N\ell} \geq 0\,.$$

En choisissant ε tel que $1/2 - (N\ell/4)K\varepsilon^{4/N\ell} > 0$, on montre facilement que toute suite miminisant $(\mathrm{P_c})$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Si $\ell = 4/N$, le problème variationnel est bien posé pour des petites valeurs de c, en effet, il faut que

$$\frac{1}{2} - c_1^{4/N+2} K c^{2/N} > 0\,.$$

Si $\ell > 4/N$, on peut montrer que $I_c = -\infty$, voir [17]. Ceci prouve que (F1) est optimale.

Sous les hypothèses du théorème 5.1, on commencera par montrer que pour toute fonction u positive appartenant à $H^1(\mathbb{R}^N)$: $J(u^*) \leq J(u)$. Ceci nous permettra d'affirmer que pour tout $c > 0$, $(\mathrm{P_c})$ admet toujours une suite minimisante $*$-symétrique (c'est-à-dire que chaque terme de la suite est $*$-symétrique).

Ensuite, on montrera que la fonctionnelle J est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement par rapport à ses suites ; ceci revient à dire que : si (v_n) est une suite $*$-symétrique telle que $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$J(v) \leq \liminf J(v_n)\,.$$

Une telle fonctionnelle sera dite ***Schwarz semi-continue inférieurement*** sur $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ainsi, pour que la conclusion du théorème soit vraie, il suffit de montrer que v appartient à la contrainte si (v_n) minimise $(\mathrm{P_c})$.

Première étape. — Lemme 5.1

Si p vérifie (P1), F vérifie (F0), (F1), (F2) et (F4), alors si (u_n) est une suite minimisant $(\mathrm{P_c})$, $\left(|u_n|^*\right)$ a aussi cette propriété.

Preuve. — Remarquons tout d'abord que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $|u| \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $|\nabla u|_2 = |\nabla |u||_2$ (voir [16]) . Ainsi, par (F0),

$$J\left(|u|\right) \leq J(u)\,.$$

Ensuite, notons que si u est un élément de $H^1(\mathbb{R}^N)$ positif, alors u^* appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ et, par la remarque 2.2, $\left|u^*\right|_2 = \left|u\right|_2$. De plus, $\left|\nabla u^*\right|_2 \leq \left|\nabla u\right|_2$, voir [17].

Ainsi, pour montrer que l'assertion est vraie, il suffit de montrer que : si u est un élément de $H^1(\mathbb{R}^N)$ positif, alors

$$\int p\big(|x|\big)u^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int p\big(|x|\big)\big(u^*(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int F\big(|x|, u(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(|x|, u^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par (P1), on a

$$\Big[p\big(|x|\big)\Big]^* = p\big(|x|\big) \qquad \text{presque partout}\,.$$

Par la remarque 2.5, on a

$$\big[u^2(x)\big]^* = \big[u^*(x)\big]^2\,.$$

Il vient alors par le lemme 3.2 que

$$\int p\big(|x|\big)u^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int \Big[p\big(|x|\big)\Big]^*\big[u^2(x)\big]^*\,\mathrm{d}x \leq \int p\big(|x|\big)\big(u^*(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Par (F0), (F1), (F2) et (F4) et en utilisant le lemme 3.4,

$$\int F\big(|x|, u(x)\big)\,\mathrm{d}x \leq \int F\big(|x|, u^*(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ceci montre que pour tout u positif appartenant à $H^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$J(u^*) \leq J(u)\,. \bullet$$

Ainsi, pour tout $c > 0$, $(\mathrm{P_c})$ admet une suite minimisante $*$-symétrique.

D'autre part, par la remarque 5.1, on sait que toute suite minimisant $(\mathrm{P_c})$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ et, par conséquent, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ainsi pour montrer que I_c est atteint (le théorème 5.1 est vrai), il suffit de prouver que : si (v_n) est une suite $*$-symétrique minimisant $(\mathrm{P_c})$ telle que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^N)$$

(jusqu'à la fin de ces notes (v_n) désigne une telle suite), alors $J(v) \leq \liminf J(v_n)$ et $v \in S_c$.

Deuxième Etape. — Lemme 5.2

Si p vérifie (P1), F vérifie (F0), (F1) et (F3), alors $J(v) \leq \liminf J(v_n)$.

Preuve. — On sait que

$$\int \left|\nabla v\right|^2 \leq \liminf \int \left|\nabla v_n\right|^2.$$

Puisque $\lim_{r\to\infty} p(r) = 0$, il est facile de voir que

$$\lim_{n\to\infty} \int p\big(|x|\big)v_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int p\big(|x|\big)v^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \int F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Soit $R > 0$, montrons tout d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\le R} F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\le R} F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Puisque (v_n) converge faiblement vers v dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, elle converge alors fortement vers v dans $L^{\ell+2}\big(|x| \le R\big)$. Il existe donc (v_{n_k}) une sous-suite de (v_n) telle que

$$v_{n_k} \longrightarrow v \qquad \text{pour presque tout } |x| \le R$$

et $v_{n_k} \le h$ où $h \in L^{\ell+2}\big(|x| \le R\big)$.

Par (F1), on a donc

$$F\big(|x|, v_{n_k}(x)\big) \le K\big(h^2(x) + h^{\ell+2}(x)\big)\,.$$

Puisque $|h|^2 + |h|^{\ell+2} \in L^1\big(|x| \le R\big)$, il vient par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\le R} F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\le R} F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{|x|>R} F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{|x|>R} F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$; puisque v_n est $*$-symétrique, on a

$$V_N |x|^N v_n^2(x) \le \int_{|y|\le|x|} v_n^2(y)\,\mathrm{d}y \le c\,.$$

Ceci entraîne que

$$v_n(x) \le \frac{c^{1/2}}{V_N^{1/2} |x|^{N/2}} \le \frac{c^{1/2}}{V_N^{1/2} R^{N/2}} \qquad \text{pour tout } |x| > R\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, en choisissant R suffisamment grand, il vient par (F3) que

$$\int_{|x|>R} F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon \int_{|x|>R} v_n^2(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon c\,,$$

ce qui montre que

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{|x|>R} F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dans cette démonstration, les propriétés de (v_n) que l'on a utilisées sont

- $\int v_n^2(x)\,\mathrm{d}x \le c \ (= c)$,
- (v_n) est radiale et radialement décroissante.

Il est clair que $\int v^2 \le c$.

La deuxième propriété est héritée presque partout par v puisque, pour tout $R>0$, il existe $n_k(R)$ telle que

$$(v_{n_k(R)}) \text{ converge vers } v \text{ pour presque tout } |x| \leq R\,.$$

Ainsi v est radiale et radialement décroissante presque partout. On obtient donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|>R} F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} \int F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x\,. \;\bullet$$

Ceci prouve que $J(v) \leq I_c$. Pour conclure que l'infimum est atteint, il reste à prouver que $v \in S_c$.

Remarque 5.2. Sous les hypothèses du lemme précédent, J est Schwarz semi-continue inférieurement sur $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Troisième Etape. — Lemme 5.3

Si p vérifie (P1) et (P2), F vérifie (F0) et (F1), alors pour tout $c>0$, $I_c<0$.

Preuve. — • *Cas $N=1$:*

Soit $\omega \in H^1(\mathbb{R})$ une fonction paire, radialement décroissante et strictement positive (on peut prendre $\omega(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$). Soient $\alpha \in (0,1]$, $0<d\leq a$ et $\omega_\alpha(x) = \omega(\alpha x)$, alors $\omega_\alpha \in H^1(\mathbb{R})$ et par (F1) :

$$J(\omega_\alpha) \leq \frac{1}{2}\int \Big\{ \big|\nabla\omega_\alpha\big|^2 - p\big(|x|\big)\omega_\alpha^2(x)\Big\}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int \Big\{\alpha^2\big|\nabla\omega(\alpha x)\big|^2 - p\big(|x|\big)\omega^2(\alpha x)\Big\}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le changement de variables $y=\alpha x$, on obtient

$$\begin{aligned} J(\omega_\alpha) &\leq \frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha^2\big|\nabla\omega\big|_2^2 - \int p\left(\frac{|y|}{\alpha}\right)\omega^2(y)\,\mathrm{d}y\right\} \leq \frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha^2\big|\nabla\omega\big|_2^2 - \int_{|y|\leq d} p\left(\frac{|y|}{\alpha}\right)\omega^2(y)\,\mathrm{d}y\right\} \\ &\leq \frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha^2\big|\nabla\omega\big|_2^2 - \omega^2(d)\int_{|y|\leq d} p\left(\frac{|y|}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}y\right\}. \end{aligned}$$

Par le changement de variables $z = y/\alpha$, on a

$$\begin{aligned} J(\omega_\alpha) &\leq \frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha^2\big|\nabla\omega\big|_2^2 - \omega^2(d)\int_{|z|\leq d/\alpha} p\big(|z|\big)\,\alpha\,\mathrm{d}z\right\} \leq \frac{\alpha}{2}\left\{\big|\nabla\omega\big|_2^2 - \frac{\omega^2(d)}{\alpha}\int_{|z|\leq d} p\big(|z|\big)\,\mathrm{d}z\right\} \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\left\{\big|\nabla\omega\big|_2^2 - \frac{\omega^2(d)\,p(d)\,2d}{\alpha}\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour α suffisamment petit, $J(\omega_\alpha)<0$. Ceci prouve que pour tout $c>0$, en choisissant α suffisamment petit, on a

$$J\left(\frac{c^{1/2}\omega_\alpha}{\big|\omega_\alpha\big|_2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{c^{1/2}\omega_\alpha}{\big|\omega_\alpha\big|_2} \in S_c\,.$$

Et par conséquent, pour tout $c>0$, $I_c<0$. •

• *Cas* $N = 2$ *:*

Soit

$$u(x) = \begin{cases} \left(\mathrm{Log}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)\right)^{1/3} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon}\,, \end{cases}$$

alors $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ mais u n'est pas bornée à cause de sa singularité en $x = 0$. Par conséquent pour

$$K = \left(\int_{|x|\leq 1} p\big(|x|\big)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\,,$$

il existe $d \in \mathbb{R}^2$ tel que $u^2(d) > K\big|\nabla u\big|_2^2$.

Soit $\omega_d(x) = u\big(|d|x\big)$, alors $\omega_d \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et

$$\begin{aligned} J(\omega_d) &\leq \frac{1}{2}\int \Big\{\big|\nabla \omega_d\big|^2 - p\big(|x|\big)\omega_d^2(x)\Big\}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int \Big\{\big|d\big|^2\,\big|\nabla u\big(|d|x\big)\big|^2 - p\big(|x|\big)\,u^2\big(|d|x\big)\Big\}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int \left\{\big|\nabla u(y)\big|^2 - \frac{1}{|d|^2}\,p\left(\frac{|y|}{|d|}\right)\,u^2(y)\right\}\,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{2}\left\{\big|\nabla u\big|_2^2 - \frac{1}{|d|^2}\int_{|y|\leq d} p\left(\frac{|y|}{|d|}\right)\,u^2(y)\,\mathrm{d}y\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\{\big|\nabla u\big|_2^2 - \frac{u^2(d)}{|d|^2}\int_{|y|\leq d} p\left(\frac{|y|}{|d|}\right)\,\mathrm{d}y\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\{\big|\nabla u\big|_2^2 - u^2(d)\int_{|z|\leq 1} p\big(|z|\big)\,\mathrm{d}z\right\}\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. •

• *Cas* $N \geq 3$ *:*

Soit $x \in B(0,1)$, on pose

$$\varphi_1(x) = \big|x\big|^{-(N/2-1)} J_{N/2-1}\big(j_{N/2-1,1}|x|\big)\,.$$

On vérifie que

$$\varphi_1 \in H_0^1\big(|x| < 1\big) \qquad \text{et} \qquad -\Delta\varphi_1 = j_{N/2-1,1}^2\,\varphi_1\,.$$

Pour R donné par (P2), on pose $\varphi_R(x) = \varphi_1(x/R)$. On vérifie facilement que

$$\varphi_R \in H_0^1\big(|x| < R\big) \qquad \text{et} \qquad -\Delta\varphi_R = \frac{j_{N/2-1,1}^2}{R^2}\,\varphi_R\,.$$

Soit

$$\omega_R = \begin{cases} \varphi_R & \text{si } |x| < R \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors $\omega_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$J(\omega_R) \leq \frac{1}{2}\int_{|x|\leq R} \left\{ \left|\nabla \omega_R\right|^2 - p\big(|x|\big)\,\omega_R^2(x) \right\} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{|x|\leq R} \left\{ \frac{j^2_{N/2-1,1}}{R^2} - p\big(|x|\big) \right\} \omega_R^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Il vient par (P2) que $J(\omega_R) < 0$ prouvant que, pour tout $c > 0$, $I_c < 0$. ●

Maintenant, on est en mesure de montrer que $v \in S_c$.

Remarquons tout d'abord que $I_c < 0$ entraîne que $v \neq 0$. (En effet si $v = 0$, (F1) implique que $F(r, 0) = 0$, c'est-à-dire que $J(v) \geq 0$ qui contredit $J(v) \leq I_c < 0$.)

Posons $t = c^{1/2}/\left|v\right|_2$, il est clair que $t \geq 1$ et $tv \in S_c$. D'autre part,

$$J(tv) = t^2 \left\{ \frac{1}{2}\int \left|\nabla v\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)v^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \frac{F\big(|x|, tv(x)\big)}{t^2}\,\mathrm{d}x \right\}.$$

Par (F4), on obtient

$$\begin{aligned} J(tv) &\leq t^2 \left\{ \frac{1}{2}\int \left|\nabla v\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)v^2(x)\,\mathrm{d}x - \int F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x \right\} \\ &\leq t^2\, J(v)\,. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que $I_c \leq t^2 I_c$. Mais $I_c < 0$, ainsi $t \leq 1$ et par conséquent $v \in S_c$. ●

Théorème 5.2

Supposons que p satisfasse (P1) et que F satisfasse (F0)→(F5) où

(F5) *il existe $R_1 > 0$, $S_1 > 0$, $A > 0$, $t \in [0, 2)$ et $0 < \sigma < 2(2-t)/N$ tels que*

$$F(r, s) \geq A r^{-t} s^{\sigma+2} \qquad \text{pour tout } r \geq R_1 \text{ et } 0 \leq s \leq S_1\,.$$

Alors la conclusion du théorème 5.1 reste vraie.

Preuve. — Puisque p vérifie (P1) et F vérifie (F0)→(F4), la conclusion du théorème 5.1 est vraie si pour tout $c > 0$, $I_c < 0$.

Comme dans [25], on pose

$$d(N) = \int \mathrm{e}^{-2|y|^2}\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad D(N) = \frac{4}{d^2(N)}\int |y|^2\,\mathrm{e}^{-2|y|^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Pour $\alpha \in (0, 1]$, on pose $\omega_\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega_\alpha(x) = \frac{\alpha^{N/4}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}}{d(N)}\,.$$

Il est facile de voir que $|\omega_\alpha|_2 = 1$,

$$\begin{aligned}|\nabla\omega_\alpha|_2^2 &= \int\sum_{i=1}^N\big[\partial_i\omega_\alpha(x)\big]^2\,\mathrm{d}x = \int\sum_{i=1}^N\big[-2\alpha x_i\,\omega_\alpha(x)\big]^2\,\mathrm{d}x\\ &= 4\alpha^2\int|x|^2\omega_\alpha^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4\alpha^{2+N/2}}{d^2(N)}\int|x|^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha|x|^2}\,\mathrm{d}x = \alpha\,D(N)\,.\end{aligned}$$

D'autre part, on sait qu'il existe $B > R_1$ tel que si $|x| \geq B$, alors $\omega_\alpha(x) \leq S_1$.

$$\begin{aligned}\int F\big(|x|,\omega_\alpha(x)\big)\,\mathrm{d}x &\geq \int_{|x|\geq B} F\big(|x|,\omega_\alpha(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{A}{\big[d(N)\big]^{\sigma+2}}\int_{|x|\geq B}|x|^{-t}\,\mathrm{e}^{-\alpha(\sigma+2)|x|^2}\alpha^{N(\sigma+2)/4}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Par le changement de variables $y = \alpha^{1/2}x$, on obtient

$$\begin{aligned}\int F\big(|x|,\omega_\alpha(x)\big)\,\mathrm{d}x &\geq \frac{A}{\big[d(N)\big]^{\sigma+2}}\alpha^{N\sigma/4+t/2}\int_{|y|\geq B\alpha^{1/2}}|y|^{-t}\,\mathrm{e}^{-(\sigma+2)|y|^2}\,\mathrm{d}y\\ &\geq \frac{A}{\big[d(N)\big]^{\sigma+2}}\alpha^{N\sigma/4+t/2}\int_{|y|\geq B}|y|^{-t}\,\mathrm{e}^{-(\sigma+2)|y|^2}\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Posons $I = \int_{|y|\geq B}|y|^{-t}\,\mathrm{e}^{-(\sigma+2)|y|^2}\,\mathrm{d}y$,

$$\begin{aligned}J(\omega_\alpha) &\leq \alpha\,D(N) - \frac{A}{\big[d(N)\big]^{\sigma+2}}\,I\alpha^{N\sigma/4+t/2}\\ &\leq \alpha\left\{D(N) - \frac{A}{\big[d(N)\big]^{\sigma+2}}\,I\alpha^{N\sigma/4+t/2-1}\right\}\end{aligned}$$

$\sigma < 2(2-t)/N$ implique que $J(\omega_\alpha) < 0$ pour α suffisamment petit. ●

5.2 Application des inégalités de symétrisation dans un problème variationnel vectoriel sans compacité

Pour tout $u = (u_1, u_2) \in \big(H^1(\mathbb{R}^N)\big)^2$, on pose

$$\begin{aligned}\widetilde{J}(u) = \widetilde{J}(u_1,u_2) &= \frac{1}{2}\int|\nabla u_1|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int|\nabla u_2|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)\,|u(x)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad -\int F\big(|x|,u_1(x),u_2(x)\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et

$$\widetilde{I}_c = \inf_{u\in\widetilde{S}_c}\widetilde{J}(u) \qquad \text{où } \widetilde{S}_c = \left\{u\in\big(H^1(\mathbb{R}^N)\big)^2 \;\middle|\; \|u\|_2^2 = c\right\} \text{ pour } c > 0\,.$$

$\|\cdot\|_2$ désigne la norme dans $\big(L^2(\mathbb{R}^N)\big)^2$. Si $u \in \big(H^1(\mathbb{R}^N)\big)^2$, alors

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \qquad \text{où } \|\nabla u\|_2^2 = |\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2\,.$$

Supposons que p satisfasse (P1) et (P2) et

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, s_1, s_2) &\longmapsto F(r, s_1, s_2) \end{aligned}$$

est une fonction telle que

(V0) F est 2-Carathéodory, ceci équivaut à dire que

$$F(\,\cdot\,, s_1, s_2) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour tout } s_1 \text{ et } s_2 \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

$$F(r, s_1, \,\cdot\,) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour presque tout } r > 0 \text{ et tout } s_1 \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

$$F(r, \,\cdot\,, s_2) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour presque tout } r > 0 \text{ et tout } s_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Et $F(r, s_1, s_2) \leq F\big(r, |s_1|, |s_2|\big)$ pour tout $r > 0$, s_1 et $s_2 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $r > 0$, s_1 et $s_2 \geq 0$, on pose $s = (s_1, s_2)$ et on suppose que

(V1) $0 \leq F(r, s_1, s_2) \leq K' \left(|s|^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} s_i^{\ell+2} \right)$ où $K' \geq 0$ et $0 < \ell < 4/N$;

(V2) $(r, s_1) \longmapsto F(r, s_1, s_2)$ et $(r, s_2) \longmapsto F(r, s_1, s_2)$ vérifient (R.C.Z.2),
$(s_1, s_2) \longmapsto F(r, s_1, s_2)$ vérifie (R.C.Z),

$$\begin{aligned} &F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) + F(A, b, c) \\ &\qquad \leq F(a, B, C) - F(a, B, c) - F(a, b, C) + F(a, b, c) \end{aligned}$$

pour tout $0 < a \leq A$, $0 \leq b \leq B$ et $0 \leq c \leq C$,

$$s_1 \longmapsto \lim_{r \to \infty} F(r, s_1, 0) \text{ et } s_2 \longmapsto \lim_{r \to \infty} F(r, 0, s_2) \text{ existent et sont continues de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+ \text{ ;}$$

(V3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_0 > 0$ et $s_0 > 0$ telles que

$$F(r, s_1, s_2) \leq \varepsilon \big|s\big|^2 \qquad \text{pour tout } r \geq r_0 \text{ et } |s| \leq s_0 \text{ ;}$$

(V4) $F(r, \theta s_1, \theta s_2) \geq \theta^2 F(r, s_1, s_2)$ pour tout $\theta \geq 1$.

Alors on a le théorème suivant.

Théorème 5.3

Si p vérifie (P1) et (P2) et si F vérifie (V0)→(V4), alors, pour tout $c > 0$, il existe $u_c = (u_c^1, u_c^2)$ appartenant à $\widetilde{S}_c$ telle que chaque composante est $*$-symétrique et $\widetilde{J}(u_c) = \widetilde{I}_c$.

Chapitre 6

Application du lemme de concentration-compacité

Dans ce chapitre, on considère ($\mathrm{P_c}$) pour $N = 1$ où l'on garde les hypothèses ($P1$), (F0)→($\mathrm{F5_0}$), ($\mathrm{F5_0}$)≡(F5) pour $t = 0$ et (F1) devient : $F(r, s) \geq 0$ pour tout $r > 0$ et $s \geq 0$ et

$$\left|F(r,s)\right| \leq K\big(|s|^2 + |s|^{\ell+2}\big) \qquad \text{pour tout } r > 0,\ s \in \mathbb{R}$$

où $K \geq 0$ et $0 < \ell < 4$.

Rappelons que celles-ci entraînent que toute suite $*$-symétrique minimisant ($\mathrm{P_c}$) est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R})$ (que l'on notera H^1).

La preuve de cette propriété utilise crucialement le fait que si (v_n) est $*$-symétrique telle que $v_n \rightharpoonup v$ dans H^1, alors

$$\int F\big(|x|, v_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int F\big(|x|, v(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ceci n'est pas nécessairement vérifié par toutes les suites qui minimisent ($\mathrm{P_c}$).

Le but de ce chapitre est de déterminer les hypothèses supplémentaires nous permettant d'affirmer que toute suite minimisant ($\mathrm{P_c}$) est relativement compacte dans H^1.

Pour ce faire, on va utiliser le lemme de concentration-compacité de P.-L. Lions qui a montré :

Si (u_n) est une suite bornée dans H^1 telle que $\int u_n^2 = c$ où $c > 0$, alors il existe une sous-suite (que l'on notera aussi (u_n)) qui satisfait une de ces trois conditions.

1) Evanescence :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pour tout } R < \infty\,.$$

2) Dichotomie : Il existe $a \in (0, c)$ tel que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$, $(u_{n,1})$ et $(u_{n,2})$ deux suites bornées dans H^1 satisfaisant, pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\int u_{n,1}^2 - a\right| < \varepsilon\,, \qquad \left|\int u_{n,2}^2 - (c-a)\right| < \varepsilon\,, \qquad \int \left|u_n'\right|^2 - \left|u_{n,1}'\right|^2 - \left|u_{n,2}'\right|^2 \geq -2\varepsilon\,.$$

3) Compacité : Il existe $(y_n) \subset \mathbb{R}$ telle que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R(\varepsilon)$ $(< \infty)$, vérifiant

$$\int_{B(y_n,R)} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x \geq c - \varepsilon\,.$$

Dans [20], P.-L. Lions explique d'une manière heuristique comment ce résultat est très utile pour prouver que toute suite minimisant « certains problèmes variationnels » est relativement compacte.

Dans ce chapitre, sous des hypothèses satisfaisantes, on montrera concrètement, essentiellement par le biais des inégalités de symétrisation, que le lemme de concentration-compacité nous permet de montrer que toute suite minimisant $(\mathrm{P_c})$ est relativement compacte dans H^1.

Soit $c > 0$ et (u_n) une suite minimisant (P_c).

On commencera par montrer que l'évanescence ne peut pas avoir lieu. Pour ce faire, on dispose du lemme suivant.

6.1 Evanescence

Lemme 6.1

Pour tout $R > 0$, il existe $K_R(p)$ telle que

$$\left|u\right|_p \leq K_R(p) \left\{ \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u^2(x)\,\mathrm{d}x \right\}^{1/4-1/2p} \left|u\right|_{H^1}^{1/2+1/p} \quad \textit{pour tout } u \in H^1 \textit{ et } p \in [2,\infty]\,.$$

Dans cette inégalité, on peut prendre

$$K_R(p) = \left\{ \sqrt{2}\left(\frac{1}{2R}+2\right) \right\}^{1/2-1/p} .$$

Preuve. — Soient $R > 0$, $u \in H^1$, $x \in \mathbb{R}$, y est tel que $x \in B(y,R)$ et $z \in B(y,R)$.

$$u^2(x) - u^2(z) = \int_z^x \left[u^2(t)\right]'\,\mathrm{d}t\,,$$

$$u^2(x) \leq u^2(z) + 2\left\{\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{\int_{B(y,R)} u'^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2},$$

$$2Ru^2(x) \leq \int_{B(y,R)} u^2(z)\,\mathrm{d}z + 4R\left\{\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{\int_{B(y,R)} u'^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2},$$

$$\begin{aligned}
u^2(x) &\leq \frac{1}{2R}\int_{B(y,R)} u^2(z)\,\mathrm{d}z + 2\left\{\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{\int_{B(y,R)} u'^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{2R}\left\{\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} + 2\left\{\int_{B(y,R)} u'^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \right\} \\
&\leq \left\{\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{2R}\left|u\right|_2 + 2\left|u'\right|_2 \right\} \\
&\leq \left\{\sup_{y\in\mathbb{R}}\int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \sqrt{2}\left(\frac{1}{2R}+2\right)\left|u\right|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\left|u\right|_\infty \leq \left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{1/4} K_R \left|u\right|_{H^1}^{1/2} \qquad \text{où } K_R = \left\{\left(\frac{1}{2R}+2\right)\sqrt{2}\right\}^{1/2}.$$

Et

$$\begin{aligned}
\int \left|u\right|^p &\leq \left|u\right|_\infty^{p-2} \int u^2 \\
&\leq \left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{(p-2)/4} \left\{K_R \left|u\right|_{H^1}^{1/2}\right\}^{p-2} \left|u\right|_2^2 \\
&\leq \left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{(p-2)/4} K_R^{p-2} \left|u\right|_{H^1}^{(p-2)/2+2} \\
&\leq K_R^{p-2} \left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u^2(t)\,\mathrm{d}t\right\}^{(p-2)/4} \left|u\right|_{H^1}^{(p+2)/2}. \bullet
\end{aligned}$$

Maintenant, on est en mesure de montrer que l'evanescence ne peut pas avoir lieu. En effet, supposons que $\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $R < \infty$.

Par le lemme précédent, on sait que

$$\left|u_n\right|_p \leq K_R(p) \left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,R)} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/4-1/p} \left|u_n\right|_{H^1}^{1/2+1/p}.$$

Mais (u_n) est bornée dans H^1, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \left|u_n\right|_p = 0 \qquad \text{pour tout } p \in (2,\infty]\,.$$

Soit $v_n = \left|u_n\right|$, alors (v_n^*) minimise $(\mathrm{P_c})$ et par la remarque 2.2,

$$\lim_{n\to\infty} \left|v_n^*\right|_p = 0 \qquad \text{pour tout } p \in (2,\infty]\,.$$

D'autre part, il existe $v \in H^1$ tel que (v_n^*) converge vers v dans H^1 (modulo une sous-suite). On a nécessairement $v \equiv 0$.

Vu que J est Schwarz semi-continue inférieurement sur H^1, $J(v) \leq I_c$; ceci entraîne que $I_c \geq 0$, contredisant ce qui a été montré à l'étape 3 du chapitre 5. $\bullet$

6.2 Dichotomie

Pour traiter la dichotomie, on commence par introduire le problème à l'infini.

On suppose que $\lim_{r\to\infty} F(r,s)$ existe et est finie pour tout s. On pose

$$F^\infty(s) = \lim_{r\to\infty} F(r,s)\,.$$

On suppose que

($\mathrm{F}^\infty 1$) $F^\infty(s) \le F(r,s)$ pour presque tout $r>0$ et pour tout $s \ge 0$;

($\mathrm{F}^\infty 2$) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{F(r,s)-F^\infty(s)}{s^2} = 0$ uniformément pour tout s dans un borné de $\mathbb{R}$.

On pose

$$J^\infty(u) = \frac{1}{2}\int u'^2(x)\,\mathrm{d}x - \int F^\infty\big(u(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_c^\infty = \inf_{u\in S_c} J^\infty(u)\,.$$

Remarque 6.1. Remarquons tout d'abord que ($\mathrm{F}^\infty 2$) implique que F^∞ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi F^∞ vérifie (F0), hérite (F1)$\rightarrow$(F4) et satisfait ($\mathrm{F5}_0$). D'où, par le théorème 5.2, on a : pour tout $c>0$, il existe u_c^∞ $*$-symétrique appartenant à S_c telle que $J^\infty(u_c^\infty) = I_c^\infty$.

Les propriétés suivantes de I_c et I_c^∞ sont d'une grande importance.

Théorème 6.1

Si F vérifie (F0)$\rightarrow$($\mathrm{F5}_0$), p vérifie (P1), alors, pour tout $c>0$, $c \mapsto I_c$ est continue.

Preuve. — Soit $c \in (0,d)$, on va montrer que I_c est continue en tout point de cet intervalle.

Soient $c_n \to c$ et u $*$-symétrique appartenant à S_c tel que $J(u) = I_c$. Posons $\omega_n = \big(c_n/c\big)^{1/2}u$, alors $(\omega_n) \subset S_{c_n}$, est $*$-symétrique et (ω_n) converge fortement vers u dans H^1.

Par la remarque 5.2, on déduit que $J(\omega_n) \to J(u)$. Ainsi

$$I_{c_n} \le J(\omega_n) \longrightarrow J(u) = I_c\,,$$

Ceci prouve que $\limsup I_{c_n} \le I_c$.

D'autre part, soit $(v_n) = (v_n^*)$ une suite vérifiant $J(v_n) = I_{c_n}$ et $\big|v_n\big|_2^2 = c_n$. Alors il existe K_c telle que

$$\big|v_n\big|_{H^1} \le K_c \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ainsi (v_n) admet une sous-suite (v_{n_k}) qui converge faiblement vers v dans H^1. Par la remarque 5.2,

$$J(v) \le \liminf J(v_{n_k}) \le 0\,.$$

Par (F4), on a

$$I_c \le J\left(\frac{v}{|v|_2}\,c^{1/2}\right) \le \left(\frac{c^{1/2}}{|v|_2}\right)^2 J(v)\,.$$

Puisque $J(v) \le 0$ et $\big|v\big|_2 \le c^{1/2}$, il vient alors

$$I_c \le J(v) \le \liminf J(v_{n_k}) = \liminf I_{c_{n_k}}\,,$$

ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} I_{c_n} = I_c$ et par conséquent, pour tout $c>0$, I_c est continue. ●

Cette propriété est bien évidemment héritée par I_c^∞.

Lemme 6.2

Soit h une fonction réelle définie sur $(0,c]$ où $c>0$ telle que

$$h(\sigma a) \leq \sigma h(a) \qquad \textit{pour tout } a \in (0,c) \textit{ et } \sigma \in [1, c/a]\,.$$

Alors

$$h(c) \leq h(a) + h(c-a)\,.$$

Preuve. — a et $(c-a)$ jouent un rôle symétrique, il suffit donc de montrer l'inégalité pour $a \geq c-a$.

$$h(c) \leq \frac{c}{a}\,h(a) = \frac{c-a}{a}\,h(a) + h(a) \leq h(c-a) + h(a)\,. \bullet$$

Lemme 6.3

Si p vérifie (P1) et (P2), F vérifie (F0)→(F5$_0$) et (F$^\infty$1), alors pour tout $c>0$

$$I_c < I_a + I^\infty_{c-a} \qquad \textit{pour tout } a \in (0,c)\,.$$

Preuve. — On montre facilement que (F0) et (F4) impliquent que $I_{\sigma c} \leq \sigma I_c$ pour tout $c>0$ et $\sigma \geq 1$.

Il vient alors par le lemme précédent que $I_c \leq I_a + I_{c-a}$ pour tout $c>0$ et $a \in (0,c)$.

D'autre part, (F$^\infty$1), (P1) et (P2) impliquent que

$$J(u) < J^\infty(u) \qquad \text{pour tout } u \in H^1 \text{ positif non nul}\,.$$

Par la remarque 6.1, on déduit que $I_c < I^\infty_c$ pour tout $c>0$, ainsi

$$I_c < I_a + I^\infty_{c-a} \qquad \text{pour tout } c > 0\,. \bullet$$

Théorème 6.2

Si F vérifie (F0)→(F5$_0$), (F$^\infty$1) et (F$^\infty$2), p vérifie (P1) et (P2), alors la dichotomie énoncée dans le lemme de concentration-compacité ne peut pas avoir lieu.

Preuve. — Supposons que l'on ait dichotomie.

On rappelle tout d'abord que les suites construites dans le lemme de Lions sont telles qu'il existe (y_n) et (R_n) vérifiant $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ et

$$\begin{cases} u_{n,1} = u_n & \text{si } |x-y_n| \leq R_1 \\ \left|u_{n,1}\right| \leq \left|u_n\right| & \text{si } R_1 < |x-y_n| \leq 2R_1 \\ 0 & \text{ailleurs}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n,2} = 0 & \text{si } |x-y_n| \leq R_n \\ \left|u_{n,2}\right| \leq \left|u_n\right| & \text{si } R_n < |x-y_n| \leq 2R_n \\ u_{n,2} = u_n & \text{si } |x-y_n| \geq 2R_n\,. \end{cases} \tag{P}$$

On a aussi par construction (pour n assez grand), voir [20],

$$\int_{R_1 \leq |x-y_n| \leq 2R_n} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leq 4\varepsilon\,. \tag{L}$$

(L) est aussi vérifiée par $(u_{n,1})$ et $(u_{n,2})$.

• Si (y_n) est bornée dans $\mathbb{R}$, alors on a nécessairement $I_c \geq I_a + I_{c-a}^{\infty}$ contredisant le lemme 6.3. En effet, supposons que (y_n) soit bornée et fixons $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned}
J(u_n) - J(u_{n,1}) - J^{\infty}(u_{n,2}) \quad = \quad & \frac{1}{2}\int \big(u'^2_n(x) - u'^2_{n,1}(x) - u'^2_{n,2}(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
& -\frac{1}{2}\int \big\{p\big(|x|\big)u_n^2(x) - p\big(|x|\big)u_{n,1}^2(x)\big\}\,\mathrm{d}x \\
& -\int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F^{\infty}\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F^{\infty}\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + \int \big\{F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big) - F^{\infty}\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Pour n assez grand,

$$\begin{aligned}
&\int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \int_{|x-y_n| \leq R_1} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + \int_{R_1 \leq |x-y_n| \leq 2R_n} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + \int_{|x-y_n| > 2R_n} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \int_{R_1 \leq |x-y_n| \leq 2R_n} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big) - F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \leq \int_{R_1 \leq |x-y_n| \leq 2R_n} \big\{\big|F\big(|x|, u_n(x)\big)\big| + \big|F\big(|x|, u_{n,1}(x)\big)\big| + \big|F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big)\big|\big\}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

(u_n) est bornée dans H^1, il existe alors M tel que $\big|u_n\big|_{\infty} \leq M$; Pour n assez grand, il vient par (F1) que

$$\int_{R_1 \leq |x-y_n| \leq 2R_n} \big|F\big(|x|, u_n(x)\big)\big|\,\mathrm{d}x \leq K(1+M^{\ell}) \int_{R_1 \leq |x-y_n| \leq 2R_n} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Par (L), on obtient $\int_{R_1 \le |x-y_n| \le 2R_n} F\big(|x|, u_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \le 4K\varepsilon(1+M^\ell) = \mu_1(\varepsilon)/3$ ((u_n) peut être remplacée par $(u_{n,1})$ et $(u_{n,2})$).

D'autre part,

$$\int \big\{F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big) - F^\infty\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x = \int_{|x-y_n|\ge R_n} \big\{F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big) - F^\infty\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x\,.$$

($\mathrm{F}^\infty 2$) implique que, $\forall \varepsilon' > 0$, $\forall s_0 > 0$, il existe $n_0(\varepsilon')$ tel que, pour tout $n \ge n_0(\varepsilon')$, $|x-y_n| \ge R_n$ implique que

$$\big|F\big(|x|, s\big) - F^\infty(s)\big| \le \varepsilon' \,|s|^2 \qquad \text{pour tout } |s| < s_0\,.$$

Ainsi

$$\int_{|x-y_n|\ge R_n} \big\{F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big) - F^\infty\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \le \varepsilon' \int_{|x-y_n|\ge R_n} u_{n,2}^2(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x-y_n|\ge R_n} \big\{F\big(|x|, u_{n,2}(x)\big) - F^\infty\big(u_{n,2}(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

De la même façon, on montre qu'il existe $\mu_2(\varepsilon)$ qui tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0^+$ et tel que

$$\frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)\big\{u_n^2(x) - u_{n,1}^2(x) - u_{n,2}^2(x)\big\}\,\mathrm{d}x \le \mu_2(\varepsilon)\,.$$

On a aussi

$$\lim_{n\to\infty} \int p\big(|x|\big) u_{n,2}^2(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Maintenant, posons

$$a_n = \int u_{n,1}^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad b_n = \int u_{n,2}^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Moyennant l'extraction d'une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\overline{a}$ et $\overline{b}$ tels que $a_n \to \overline{a}(\varepsilon)$, $b_n \to \overline{b}(\varepsilon)$ et $|\overline{a} - a| \le \varepsilon$, $|\overline{b} - (c-a)| \le \varepsilon$. Il vient alors que

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) \ge \lim_{n\to\infty} I_{a_n} + \lim_{n\to\infty} I_{b_n}^\infty - \mu_1(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon) - \varepsilon\,.$$

Par le théorème 6.1, on obtient

$$I_c \ge I_{\overline{a}} + I_{\overline{b}}^\infty - \mu_1(\varepsilon) - \mu_2(\varepsilon) - \varepsilon\,.$$

Le théorème 6.1 implique aussi que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{\overline{a}} = I_a$ et $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{\overline{b}}^\infty = I_{c-a}^\infty$. En faisant tendre ε vers 0^+ dans la dernière inégalité, il vient que

$$I_c \ge I_a + I_{c-a}^\infty\,,$$

ce qui contredit le lemme 6.3.

On vient de montrer que si (y_n) est bornée, la dichotomie énoncée dans le lemme de concentration-compacité ne peut pas avoir lieu.

- Si (y_n) est non bornée, on peut supposer (moyennant l'extraction d'une sous-suite) que $|y_n| \to \infty$. On s'intéresse alors à

$$J(u_n) - J^\infty(u_{n,1}) - J(u_{n,2})\,.$$

La même démarche permet de déduire que $I_c \ge I_a^\infty + I_{c-a}$, contredisant le lemme 6.3. ●

6.3 Compacité

Théorème 6.3
Si p vérifie (P1) et (P2), F vérifie (F0)$\to$(F5$_0$), (F$^\infty$1) et (F$^\infty$2), alors toute suite minimisant (P_c) est relativement compacte dans H^1.

PREUVE. — Par ce qui précède, le seul cas envisageable dans le lemme de concentration-compacité est la compacité. Ceci équivaut à dire qu'il existe (y_n) telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R(\varepsilon) < \infty$ telle que

$$\int_{B(y_n,R)} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x \geq c - \varepsilon\,.$$

On commencera par montrer que $I_c < I_c^\infty$ (voir preuve du lemme 6.3) implique que (y_n) est nécessairement bornée.

Supposons que (y_n) ne le soit pas, on peut alors supposer (moyennant l'extraction d'une sous-suite) que $|y_n| \to \infty$ quand $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$,

$$J(u_n) - J^\infty(u_n) = -\frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)u_n^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_{B(y_n,R)} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x + \int_{^cB(y_n,R)} \big\{\big|F\big(|x|, u_n(x)\big)\big| + \big|F^\infty\big(u_n(x)\big)\big|\big\}\,\mathrm{d}x\,.$$

Puisque $\int_{^cB(y_n,R)} u_n^2 \leq \varepsilon$, il vient par (F1) qu'il existe $\delta_1(\varepsilon)$ tel que

$$\int_{^cB(y_n,R)} \big|F\big(|x|, u_n(x)\big)\big|\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_{^cB(y_n,R)} \big|F^\infty\big(u_n(x)\big)\big|\,\mathrm{d}x \leq \delta_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0\,.$$

D'autre part, vu que (y_n) tend vers l'infini, (F$^\infty$2) implique que, $\forall \varepsilon' > 0$, il existe $n_1(\varepsilon')$ tel que, pour tout $n \geq n_1(\varepsilon')$, on a

$$|x - y_n| \leq R \quad \text{implique que} \quad F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big) \leq \varepsilon' u_n^2(x)\,.$$

Ainsi,

$$\int_{B(y_n,R)} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon' c\,,$$

prouvant que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(y_n,R)} \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

On obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} -\int \big\{F\big(|x|, u_n(x)\big) - F^\infty\big(u_n(x)\big)\big\}\,\mathrm{d}x \geq -2\delta_1(\varepsilon)\,.$$

De la même façon, on démontre qu'il existe $\delta_2(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0^+$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\int p\big(|x|\big)u_n^2(x)\,\mathrm{d}x \geq -\delta_2(\varepsilon)\,.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) - J^\infty(u_n) \geq -\delta_2(\varepsilon) - 2\delta_1(\varepsilon)\,,$$

ce qui implique que

$$I_c \geq -\delta_2(\varepsilon) - 2\delta_1(\varepsilon) + I_c^\infty\,.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on a $I_c \geq I_c^\infty$. On doit donc nécessairement avoir (y_n) bornée.

Sachant qu'il existe $u \in H^1$ tel que (u_n) converge faiblement vers u dans H^1 (modulo une sous-suite), on va montrer que cette convergence est forte.

Etant donné que (y_n) est bornée, il existe y tel que

$$\int_{B(y,R)} u_n^2(x)\,\mathrm{d}x \geq c - \varepsilon\,,$$

ainsi

$$\int_{B(y,R)} u^2(x)\,\mathrm{d}x \geq c - \varepsilon$$

et par conséquent $\int u^2(x)\,\mathrm{d}x = c$. Ce qui prouve que $u_n \to u$ dans L^2 (moyennant l'extraction d'une sous-suite). D'autre part,

$$\big|u_n - u\big|_\infty^2 \leq \big|u_n - u\big|_2 \big|u_n' - u'\big|_2 \leq \big|u_n - u\big|_2 \left\{\big|u_n'\big|_2 + \big|u'\big|_2\right\}\,.$$

Puisque (u_n) est bornée dans H^1, $u_n \to u$ dans L^∞ et donc $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [2,\infty]$.

Il est clair que

$$\lim_{n\to\infty}\int p\big(|x|\big)u_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int p\big(|x|\big)u^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Il reste à prouver que

$$\lim_{n\to\infty}\int F\big(|x|, u_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int F\big(|x|, u(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

(modulo une sous-suite bien entendu).

Puisque $u_n \to u$ dans L^2, il existe $(u_{\varphi_1(n)})$ une sous-suite de (u_n) vérifiant $u_{\varphi_1(n)} \to u$ presque partout et

$$\big|u_{\varphi_1(n)}\big| \leq h \qquad \text{où } h \in L^2\,.$$

D'autre part, $u_{\varphi_1(n)} \to u$ dans $L^{\ell+2}$, il existe alors $(u_{\varphi_2(n)})$ une sous-suite de $(u_{\varphi_1(n)})$ telle que

$$\big|u_{\varphi_2(n)}\big| \leq k \qquad \text{où } k \in L^{\ell+2}\,.$$

Il vient alors par (F1) que

$$\big|F\big(|x|, u_{\varphi_2(n)}(x)\big)\big| \leq K\left(\big|u_{\varphi_2(n)}^2(x)\big| + \big|u_{\varphi_2(n)}^{\ell+2}(x)\big|\right) \leq K(h^2(x) + k^{\ell+2}(x))\,.$$

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int F\big(|x|,u_{\varphi_2(n)}(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int F\big(|x|,u(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi $J(u) = \lim_{n\to\infty} J(u_n)$ (moyennant l'extraction d'une sous-suite) car $I_c \le J(u) \le \lim_{n\to\infty} J(u_n) = I_c$. D'où

$$\int u_n'^2(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int u'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

montrant que (u_n) est relativement compacte dans H^1.

Ceci achève la preuve du théorème 6.3. ●

Remarque 6.2. Si (u_n) est une suite bornée dans H^1 telle que $\left|u_n\right|_2^2 = c_n \to c$, alors les conclusions du lemme de concentration-compacité restent valides.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme à $v_n = u_n/c_n^{1/2}$.

Corollaire 6.1

Si F vérifie (F0)→(F5$_0$), (F$^\infty$1) et (F$^\infty$2) et p vérifie (P1) et (P2).

Si (u_n) est une suite de H^1 vérifiant

$$\left|u_n\right|_2^2 \longrightarrow c \qquad \textit{et} \qquad J(u_n)\longrightarrow I_c\,,$$

alors (u_n) est relativement compacte dans H^1.

Preuve. — Il suffit de remarquer qu'une telle suite est nécessairement bornée dans H^1 et reprendre la preuve du théorème 6.3. ●

Théorème 6.4

Si $p\equiv 0$ et $F(r,s)=F(s)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait (F1), (F3), (F5$_0$) et (F4*) où

(F4*) $\quad \exists\beta>1$ *tel que* $F(\theta s)\ge\theta^{2\beta}F(s)$ *pour tout* $s\ge 0$ *et* $\theta>1$.

Si (u_n) est une suite dans (H^1) vérifiant $\left|u_n\right|_2^2 \to c$ et $J(u_n)\to I_c$, alors il existe $(y_n)\subset\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{u}_n = u_n(\,\cdot\,+y_n)$ est relativement compacte dans H^1.

Preuve. —

1) L'évanescence ne peut pas avoir lieu.

2) (F4*) implique que $I_{\theta c} < \theta I_c \ \ \forall\theta>1$ et $c>0$, par conséquent

$$I_c < I_a + I_{c-a} \qquad \forall c>0 \text{ et } a\in(0,c)\,.$$

Ainsi, la dichotomie ne peut pas avoir lieu.

3) Soient (y_n) la suite donnée dans le lemme de Lions et

$$\widetilde{u}_n = u_n(\,\cdot\,+y_n)\,.$$

Il est évident que $\left|\widetilde{u}_n\right|_2^2 \to c$ et $J(\widetilde{u}_n)\to I_c$. Le même argument qu'à la page 73 permet d'affirmer que $(\widetilde{u}_n)$ est relativement compacte dans H^1. ●

Chapitre 7

Stabilité orbitale des solutions de l'équation de Schrödinger

7.1 Présentation du problème

Tout au long de ce chapitre $H^1 \equiv H^1(\mathbb{R})$, H désigne $\big\{Z = (u, v) \in H^1 \times H^1\big\}$ muni du produit scalaire $\langle \cdot \rangle$ défini comme suit.

Si $Z_1 = (u_1, v_1) \in H$ et $Z_2 = (u_2, v_2) \in H$, alors

$$\big\langle Z_1, Z_2 \big\rangle = \int u_1 v_1 + \int u_2 v_2 + \int u_1' v_1' + \int u_2' v_2' \,.$$

Ainsi si $Z \in H$: $\big\|Z\big\|_H^2 = \big\|Z\big\|_2^2 + \big\|Z'\big\|_2^2$ où $Z' = (u', v')$ et $\big\|Z\big\|_2^2 = \big||Z|\big|_2^2$. Il est clair que $\big(H, \langle \cdot \rangle\big)$ est un espace hilbertien.

Etant donné Φ_0 un élément de H, on considère l'équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de la forme

$$\begin{cases} i\Phi_t + \Phi_{xx} + g(\Phi) = 0 \\ \Phi(0, x) = \Phi_0(x) \end{cases} \tag{NLS}$$

où $\Phi(t, \cdot\,) = \big(\Phi_1(t, \cdot\,), \Phi_2(t, \cdot\,)\big)$ est un élément de H, Φ_t désigne sa dérivée par rapport à t, $i\Phi_t = (-\Phi_{2t}, \Phi_{1t})$, Φ_x désigne la dérivée par rapport à x, g est une fonction définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $g(0) = 0$ que l'on étend sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en posant

$$g(z) = \frac{z}{|z|}\, g\big(|z|\big) \,.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$G(z) = \int_0^{|z|} g(s)\,\mathrm{d}s \,.$$

On associe à (NLS) la fonctionnelle $\widetilde{E}$ définie sur H par

$$\widetilde{E}(Z) = \frac{1}{2} \int \big|Z'\big|^2 - \int G(Z) \,.$$

Si $Z=(u,v)$, on note

$$\widetilde{E}(Z)=\widetilde{E}(u,v)=\frac{1}{2}\int u'^2+v'^2-\int G\big(u^2+v^2\big)^{1/2}$$

et

$$E(u)=\widetilde{E}(u,0)=\frac{1}{2}\int u'^2-\int G(u)\qquad \text{pour tout } u\in H^1\,.$$

Pour tout $s\geq 0$, on suppose que g satisfait les hypothèses suivantes :

(g0) g est mesurable et positive ;

(g1) $g(s)\leq L(s+s^{h+1})$ où $L\geq 0$ et $0<h<4$;

(g2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ telle que $g(s)\leq\varepsilon s$ pour tout $s<\delta_1$;

(g3) $\exists\beta>1$ tel que $g(\theta s)\geq\theta^\beta g(s)$ pour tout $\theta>1$;

(g4) il existe $0<\alpha<4$, $B>0$ et $s_1>0$ telles que $g(s)\geq Bs^{\alpha+1}$ pour tout $s<s_1$.

Pour $c>0$, on pose

$$\widetilde{S}_c=\big\{Z\in H\;\big|\;\|Z\|_2^2=c\big\}\,,\qquad M_c=\inf\big\{\widetilde{E}(Z)\mid Z\in\widetilde{S}_c\big\}\quad\text{et}\quad Z_c=\big\{Z\in\widetilde{S}_c\mid\widetilde{E}(Z)=M_c\big\}\,.$$

Remarquons que si $u\in Z_c$, alors $u(\,\cdot\,+y)\in Z_c$ pour tout $y\in\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, on ne s'intéresse pas à résoudre (NLS), ce problème a été largement étudié, voir [6] et [29] par exemple.

A notre connaissance, le meilleur résultat est celui de Cazenave-Haraux qui ont montré que, si g vérifie (g1) et

(g5) pour tout $x,y\in\mathbb{R}_+$, il existe $0<M<\infty$ tel que

$$\big|g(y)-g(x)\big|\leq M\big(1+|x|^h+|y|^h\big)|y-x|$$

(ils supposent aussi que $g(0)=0$ mais dans notre cas, cette égalité est impliquée par (g0) et (g1)), alors pour tout $\Phi_0\in H$, (NLS) admet une solution unique $\Phi\in C(\mathbb{R}_+,H)$ vérifiant

$$\big\|\Phi(t,\,\cdot\,)\big\|_2=\big\|\Phi_0\big\|_2\qquad\text{pour tout } t>0 \tag{CH1}$$

$$\widetilde{E}\big(\Phi(t,\,\cdot\,)\big)=\widetilde{E}\big(\Phi_0\big)\qquad\text{pour tout } t>0\,. \tag{CH2}$$

Dans ce chapitre, on va étudier un autre aspect de l'équation de Schrödinger aussi intéressant que celui de l'existence et de l'unicité des solutions de (NLS) qui est la stabilité orbitale de Z_c.

Dans la suite de ce travail, on suppose que g vérifie (g0)$\to$(g5). Ceci implique, entre autres, que $E\in C^1(H^1,\mathbb{R})$, $\widetilde{E}\in C^1(H,\mathbb{R})$ (voir [6]) et qu'il existe u_c $*$-symétrique appartenant à S_c tel que $E(u_c)=m_c$ où $m_c=\inf_{u\in S_c}E(u)$, voir théorème 5.2.

On suppose que Z_c est non vide (on montrera après que c'est le cas).

Définition 7.1. On dit que Z_c est orbitalement stable si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que pour tout $\Phi_0 \in H$,

$$\inf_{u\in Z_c} \big\|\Phi_0 - u\big\|_H < \delta$$

implique que pour tout $t \geq 0$

$$\inf_{u\in Z_c} \big\|\Phi(t,\,\cdot\,) - u\big\|_H < \varepsilon$$

où $\Phi(t,\,\cdot\,)$ est la solution de (NLS) correspondant à la condition initiale Φ_0.

Pour montrer que sous les hypothèses mentionnées ci-dessus ((g0)$\rightarrow$(g5)) Z_c est orbitalement stable, on va raisonner par l'absurde.

Soit $c > 0$, supposons que Z_c ne soit pas orbitalement stable, ceci entraînerait qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\Phi_0^n \in H$ et $t_n \geq 0$ tels que

$$\big\|\Phi_0^n\big\|_2^2 \longrightarrow c\,, \qquad \widetilde{E}(\Phi_0^n) \longrightarrow M_c \quad \text{et} \quad \inf_{u\in Z_c} \big\|\Phi^n(t_n,\,\cdot\,) - u\big\|_H \geq \varepsilon_0$$

($\Phi^n(t_n,\,\cdot\,)$ est la solution de (NLS) correspondant à la condition initiale Φ_0^n). Il vient alors par (CH1) et (CH2) qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, Φ^n et $t_n \geq 0$ tels que

$$\big\|\Phi^n(t_n,\,\cdot\,)\big\|_2^2 \longrightarrow c\,, \qquad \widetilde{E}\big(\Phi^n(t_n,\,\cdot\,)\big) \longrightarrow M_c \quad \text{et} \quad \inf_{u\in Z_c} \big\|\Phi^n(t_n,\,\cdot\,) - u\big\|_H \geq \varepsilon_0\,.$$

Ainsi, pour montrer que Z_c est orbitalement stable, il suffit de montrer que si (Z_n) est une suite dans H telle que

$$\big\|Z_n\big\|_2^2 \longrightarrow c \qquad \text{et} \qquad \widetilde{E}(Z_n) \longrightarrow M_c\,, \tag{1}$$

alors (Z_n) est relativement compacte dans H (modulo la translation au sens du théorème 6.4).

Remarquons qu'en montrant ceci, on aura montré par la même occasion que Z_c est non vide.

Dans la suite de ce chapitre, on ne fera pas de distinction entre une suite de fonctions et sa translatée au sens du théorème 6.4.

7.2 Composition des fonctions dérivables avec des fonctions de $H^1 \times H^1$

Proposition 7.1
Si $F \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $F(0) = 0$, alors, pour tout u et v appartenant à H^1, $F(u,v) \in H^1$ et

$$\big[F(u,v)\big]' = F_x(u,v)u' + F_y(u,v)v'\,.$$

PREUVE. — Soient $u,\,v \in H^1$ et $A = \Big\{\big|u\big|_\infty^2 + \big|v\big|_\infty^2\Big\}^{1/2}$.

$F(0) = 0$ implique que

$$F(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\,F(ts)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big\langle \nabla F(ts), s\big\rangle\,\mathrm{d}t \leq |s| \int_0^1 \big|\nabla F(ts)\big|\,\mathrm{d}t\,.$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}^2$ tel que $|s| \leq A$,

$$\big|F(s)\big| \leq |s| \sup_{|z|\leq A} \big|\nabla F(z)\big|\,.$$

D'où, il existe $a \geq 0$ telle que $\big|F(s)\big| \leq a|s|$ pour tout $|s| \leq A$. Ceci montre que $F(u,v) \in L^2$.

D'autre part, vu que u et v appartiennent à L^∞ et ∇F est continue,

$$F_x(u,v)u' + F_y(u,v)v' \in L^2\,.$$

Soient (u_n) et $(v_n) \subset C_c^\infty$ telles que

- $u_n \to u$ dans H^1,
- $u_n \to u$ presque partout,
- $u_n' \to u'$ presque partout et $|u_n'| \leq k$ presque partout où $k \in L^2$;
- $v_n \to v$ dans H^1,
- $v_n \to v$ presque partout,
- $v_n' \to v'$ presque partout et $|v_n'| \leq \ell$ presque partout où $\ell \in L^2$.

Pour tout $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\int F(u_n,v_n)\varphi' = -\int \{F_x(u_n,v_n)u_n' + F_y(u_n,v_n)v_n'\}\varphi\,.$$

Il vient alors par le théorème de convergence dominée que

$$\int F(u,v)\varphi' = -\int \{F_x(u,v)u' + F_y(u,v)v'\}\varphi\,. \bullet$$

Remarque 7.1. Si l'on travaille en dimension > 1, l'appartenance d'une fonction à $H^1(\mathbb{R}^N)$ n'implique pas, en général, son appartenance à L^∞.

Dans ce cas, on dispose du résultat suivant.

Proposition 7.2

Si $F \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\sup_{\mathbb{R}^2} |\nabla F| < \infty$ et $F(0) = 0$ et si u et v appartiennent à $H^1(\mathbb{R}^N)$, alors $F(u,v)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\big[F(u,v)\big]' = F_x(u,v)u' + F_y(u,v)v'\,.$$

Corollaire 7.1

(de la proposition 7.1) Si u et v sont deux éléments de H^1, alors $\big(u^2+v^2\big)^{1/2}$ appartient également à H^1 et

$$\Big[\big(u^2+v^2\big)^{1/2}\Big]' = \begin{cases} \dfrac{uu'+vv'}{\big(u^2+v^2\big)^{1/2}} & \text{si } u \text{ ou } v \neq 0 \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Preuve. — Soit $\varepsilon > 0$, on pose

$$\begin{array}{rcl} \psi^\varepsilon : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \big(x^2+y^2+\varepsilon^2\big)^{1/2} - \varepsilon\,, \end{array}$$

alors ψ^ε vérifie les hypothèses de la proposition 7.1. Soient $u, v \in H^1$, on a alors pour tout $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\int \left\{ \left(u^2(x) + v^2(x) + \varepsilon^2\right)^{1/2} - \varepsilon \right\} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{u(x)u'(x) + v(x)v'(x)}{\left(u^2(x) + v^2(x) + \varepsilon^2\right)^{1/2}}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\left(u^2(x) + v^2(x) + \varepsilon^2\right)^{1/2} - \varepsilon \leq \left(u^2(x) + v^2(x)\right)^{1/2}$$

et

$$\left| \frac{u(x)u'(x) + v(x)v'(x)}{\left(u^2(x) + v^2(x) + \varepsilon^2\right)^{1/2}} \right| \leq \left|u'(x)\right| + \left|v'(x)\right|.$$

Par le théorème de convergence dominée, il vient que

$$\int \left(u^2(x) + v^2(x)\right)^{1/2} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{u(x)u'(x) + v(x)v'(x)}{\left(u^2(x) + v^2(x) + \varepsilon^2\right)^{1/2}}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ce qui montre le corollaire. ●

7.3 Caractérisation de Z_c

Lemme 7.1
Si u est un élément de H^1 tel que $E(u) = m_c$, $u \in S_c$ et $u \geq 0$, alors $u > 0$.

Preuve. — $E \in C^1(H^1, \mathbb{R})$, par la méthode de Lagrange, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$E'(u)v = \lambda \int uv \qquad \text{pour tout } v \in H^1\,,$$

ainsi

$$\int \left\{ u'(x)v'(x) - g\big(u(x)\big)v(x) \right\}\,\mathrm{d}x = \lambda \int u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tout } v \in H^1\,,$$

ce qui montre que u' admet une dérivée faible et

$$u''(x) = -g\big(u(x)\big) - \lambda u(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

(g1) implique que $u'' \in L^2$, d'où $u \in C^1(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe x_0 tel que $u(x_0) = 0$, alors nécessairement $u'(x_0) = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon^2 < \frac{2}{\left\{|\lambda| + L\big(1 + |u|_\infty^h\big)\right\}}\,, \qquad m_\varepsilon = \max_{|s - x_0| \leq \varepsilon} \left|u(s)\right| \quad \text{et} \quad x \in B(x_0, \varepsilon)\,.$$

$$\int_{x_0}^{y} u''(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{y} \left\{ -\lambda u(t) - g\big(u(t)\big) \right\}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\int_{x_0}^{x} u'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{x_0}^{y} \left\{ -\lambda u(t) - g\big(u(t)\big) \right\}\,\mathrm{d}t \right\}\,\mathrm{d}y\,,$$

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{t}^{x} \left\{ -\lambda u(t) - g\big(u(t)\big) \right\}\,\mathrm{d}y \right\}\,\mathrm{d}t\,.$$

D'où

$$\left|u(x)\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{|\lambda| + L\left(1+|u|_\infty^h\right)\right\} m_\varepsilon$$

qui implique que

$$m_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{|\lambda| + L\left(1+|u|_\infty^h\right)\right\} m_\varepsilon\,.$$

Par le choix de ε, on a nécessairement $m_\varepsilon = 0$, ce qui entraîne que $u \equiv 0$ sur $B(x_0, \varepsilon)$ et donc $u \equiv 0$ partout. ●

Soit (Z_n) vérifiant (1) telle que $Z_n = (u_n, v_n)$, alors (Z_n) est bornée dans H, et par conséquent (u_n) et (v_n) le sont dans H^1. Ainsi (moyennant l'extraction d'une sous-suite), il existe u et v appartenant à H^1 tels que

$$\begin{array}{ll} (u_n) & \text{converge faiblement vers } u \text{ dans } H^1 \\ \text{et} & \\ (v_n) & \text{converge faiblement vers } v \text{ dans } H^1\,. \end{array} \tag{2}$$

On pose

$$\varphi_n(x) = \left(u_n^2(x) + v_n^2(x)\right)^{1/2} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Il vient alors par le corollaire 7.1 que $(\varphi_n) \subset H^1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{u_n(x)u_n'(x) + v_n(x)v_n'(x)}{\left(u_n^2(x)+v_n^2(x)\right)^{1/2}} & \text{si } u_n^2 + v_n^2 > 0 \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Lemme 7.2

Si (Z_n) vérifie (1), alors (φ_n) est relativement compacte dans H^1 (modulo la translation au sens du théorème 6.4) et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x|u_n^2(x)+v_n^2(x)>0\}} \frac{\left(u_n v_n' - u_n' v_n\right)^2}{u_n^2 + v_n^2} = 0\,.$$

Preuve. —

$$\begin{aligned} \widetilde{E}(Z_n) - E(\varphi_n) &= \frac{1}{2}\left\{\int_{\{x|u_n^2(x)+v_n^2(x)>0\}} u'^2_n + v'^2_n - \left\{\left[\left(u_n^2+v_n^2\right)^{1/2}\right]'\right\}^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\{x|u_n^2(x)+v_n^2(x)>0\}} \frac{\left(u_n v_n' - u_n' v_n\right)^2}{u_n^2+v_n^2} \end{aligned}$$

prouvant que

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{E}(Z_n) \geq \limsup E(\varphi_n)\,.$$

D'autre part, $\|Z_n\|_2^2 = |\varphi_n|_2^2 = c_n \to c$, par le théorème 6.1,

$$m_c = \lim_{n\to\infty} m_{c_n} \le \liminf E(\varphi_n) \qquad (m_c = \inf_{u\in S_c} E(u))\,.$$

Il est facile de voir que $M_c \le m_c$, ainsi

$$M_c \le m_c \le \liminf E(\varphi_n) \le \limsup E(\varphi_n) \le \lim_{n\to\infty} \widetilde{E}(Z_n) = M_c$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} E(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{E}(Z_n) = M_c = m_c \tag{3}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x|u_n^2(x)+v_n^2(x)>0\}} \frac{\big(u_n v_n' - u_n' v_n\big)^2}{u_n^2 + v_n^2} = 0\,.$$

(φ_n) vérifie les deux propriétés suivantes :

$$|\varphi_n|_2^2 \longrightarrow c \qquad \text{et} \qquad E(\varphi_n) \longrightarrow m_c\,.$$

Par le théorème 6.4, (φ_n) est relativement compacte dans H^1 (modulo la translation au sens du théorème 6.4), c'est-à-dire que, moyennant l'extraction d'une sous-suite, il existe $\varphi \in H^1$ et $(y_n) \subset \mathbb{R}$ tels que $\varphi_n(\,\cdot\, + y_n)$ converge fortement vers φ dans H^1. ●

On a donc $E(\varphi) = m_c$, $\varphi \in S_c$ et $\varphi \ge 0$, par le lemme 7.1 $\varphi > 0$.

Lemme 7.3

Soient u et v donnés par (2), alors
(a) *si $u \not\equiv 0$ et $v \not\equiv 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \neq 0$ telle que $u \equiv \alpha v$;*
(b) *s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = 0$, alors $u \equiv 0$ partout ;*
(c) *s'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(y_0) = 0$, alors $v \equiv 0$ partout.*

PREUVE. — Remarquons tout d'abord que (2) implique que

$$u_n^2 \rightharpoonup u^2 \quad \text{et} \quad v_n^2 \rightharpoonup v^2 \qquad \text{dans } L^2$$

puisque (u_n^2) et (v_n^2) sont bornées dans L^2. Par conséquent,

$$\varphi_n^2 = \big(u_n^2 + v_n^2\big) \rightharpoonup \varphi^2 \qquad \text{dans } L^2\,,$$

ce qui prouve que $\varphi = \big(u^2 + v^2\big)^{1/2}$. Puisque $\varphi > 0$, u et v ne s'annulent jamais au même point.

- Si $u \equiv 0$, il n'y a rien à montrer, (b) est vraie.
- Sinon : soit K_u un intervalle compact sur lequel u ne s'annule pas, ceci implique qu'à partir d'un certain rang u_n ne s'annule pas non plus. Ceci revient à dire que sur K_u, il existe $\delta_{K_u} > 0$ telle que

$$|u(x)| \ge \delta_{K_u} > 0$$

et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n(x)| \ge \delta_{K_u} > 0 \qquad \text{pour tout } x \in K_u \text{ et } n \ge n_0\,.$$

Il vient alors par le lemme 7.2 que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_u}\left[\left(\frac{v_n}{u_n}\right)'\right]^2\frac{u_n^4}{\varphi_n^2}=0\,.$$

Ceci implique que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_u}\left[\left(\frac{v_n}{u_n}\right)'\right]^2=0\,.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_u}\left(\frac{v_n}{u_n}\right)'=0\,.$$

Soit $x_0\in K_u$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_n(x)}{u_n(x)}-\frac{v_n(x_0)}{u_n(x_0)}\right)=0 \qquad \text{pour tout } x\in K_u\,.$$

Puisque $\big(v_n(x_0)/u_n(x_0)\big)$ est bornée dans $\mathbb{R}$, elle est donc convergente (modulo une sous-suite bien sûr). Par conséquent, il existe C_{K_u} telle que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n(x)}{u_n(x)}=\frac{v(x)}{u(x)}=C_{K_u} \qquad \text{pour tout } x\in K_u\,.$$

Ainsi, pour tout intervalle compact K_u sur lequel u ne s'annule pas, on peut trouver C_{K_u} telle que

$$v(x)=C_{K_u}u(x) \qquad \text{pour tout } x\in K_u\,. \tag{U}$$

De la même manière on a, si $v\equiv 0$, alors (c) est vérifiée ; sinon, pour tout intervalle compact K_v sur lequel v ne s'annule pas, il existe C_{K_v} tel que

$$u(x)=C_{K_v}v(x) \qquad \text{pour tout } x\in K_v\,. \tag{V}$$

Maintenant, on est en mesure de montrer toutes les assertions énoncées au lemme.

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $u(x_0)=0$, alors $v(x_0)\neq 0$. On peut alors trouver un intervalle compact K_v contenant x_0 sur lequel v ne s'annule pas.

Par (V), il existe C_{K_v} tel que $u(x)=C_{K_v}v(x)$ pour tout $x\in K_v$. Par conséquent $u\equiv 0$ sur K_v.

On va montrer que $u\equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons qu'il existe x_1 tel que $u(x_1)\neq 0$ (sans perte de généralité, on peut prendre $x_1>x_0$). Il vient par la continuité de u et v qu'il existe K_v' (un intervalle compact sur lequel v ne s'annule pas) et x_0^1 vérifiant : $x_0<x_0^1\le x_1$, $u(x_0^1)\neq 0$ et x_0, $x_0^1\in K_v'$.

Sur K_v', $u(x)=C_{K_v'}v(x)$ pour tout x, en particulier :

$$\begin{aligned} u(x_0)=0 &\quad\Longrightarrow\quad C_{K_v'}=0\,,\\ u(x_0^1)\neq 0 &\quad\Longrightarrow\quad C_{K_v'}\neq 0\,.\end{aligned}$$

Ceci implique que x_1 ne peut pas exister, ainsi (a) est vérifiée.

Le même raisonnement permet d'affirmer que s'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(y_0) = 0$, alors $v \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi le seul cas qui nous reste à traiter est $u \not\equiv 0$ et $v \not\equiv 0$ partout sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, il est facile de montrer qu'il existe $\alpha \neq 0$ telle que $u(x) = \alpha v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans le lemme 7.3, on a montré que

- si $u \not\equiv 0$, alors $u \not\equiv 0$ partout et il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ telle que $v \equiv c_1 u$;
- si $v \not\equiv 0$, alors $v \not\equiv 0$ partout et il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ telle que $u \equiv c_2 v$. ●

Maintenant, on peut énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 7.1

Si g vérifie (g0)→(g5), alors, pour tout $c > 0$,

$$Z_c = \left\{ Z \in \widetilde{S}_c \mid \widetilde{E}(Z) = M_c \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\sigma}\omega \mid \sigma \in [0, 2\pi) \ \text{et}\ \omega \in W_c \right\},$$

où $W_c = \left\{ \omega \in H^1 \mid \omega \in S_c\,,\ \omega > 0 \ \text{et}\ E(\omega) = m_c \right\}$ et Z_c est orbitalement stable.

Preuve. — *Stabilité orbitale de Z_c :* Vu que u et v jouent un rôle symétrique, il suffit de traiter le cas

$$v(x) = c_1 u(x)\,.$$

On a $\varphi_n \to \varphi$ dans H^1, ainsi

$$\left(u_n^2 + v_n^2\right)^{1/2} \longrightarrow \left(u^2 + v^2\right)^{1/2} \qquad \text{dans } L^2\,,$$

c'est-à-dire que $\left\|Z_n\right\|_2^2 \to \left\|Z\right\|_2^2$, où $Z = (u, v)$.

Par le lemme 7.2,

$$\lim_{n\to\infty} \int u'^2_n + v'^2_n = \lim_{n\to\infty} \int \left(\varphi_n'\right)^2 = \int \left(\varphi'\right)^2,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{n\to\infty} \textstyle\int u'^2_n + v'^2_n &= \int \left\{ \left[\left(u^2+v^2\right)^{1/2} \right]' \right\}^2 \\ &= \int (1 + c_1^2) u'^2 = \int u'^2 + v'^2\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\left\|Z_n'\right\|_2^2 \to \left\|Z'\right\|_2^2$. ●

Caractérisation de Z_c : Montrons que

$$Z_c = \left\{ \mathrm{e}^{i\sigma}\omega \mid \sigma \in [0, 2\pi) \text{ et } \omega \in W_c \right\}.$$

Rappelons tout d'abord que, dans le lemme 7.2, on a montré que $m_c = M_c$.

Soit $Z = \mathrm{e}^{i\sigma}\omega$, où $\sigma \in [0, 2\pi)$ et $\omega \in W_c$, alors $Z \in \widetilde{S}_c$ et

$$\widetilde{E}(Z) = \widetilde{E}(\mathrm{e}^{i\sigma}\omega) = \frac{1}{2}\int \left|\mathrm{e}^{i\sigma}\omega'\right|^2 - \int G(\mathrm{e}^{i\sigma}\omega) = \frac{1}{2}\int \omega'^2 - \int G\big(|\omega|\big) = E(\omega)\,,$$

d'où $\widetilde{E}(Z) = E(\omega) = m_c = M_c$.

Réciproquement, soit
$$Z = (u, v) \in Z_c\,.$$
On pose $\omega \equiv |Z|$, alors $\omega \in S_c$ et $E(\omega) = \widetilde{E}(Z) = M_c = m_c$.

Par le lemme 7.1, on sait que $\omega > 0$.

Si $v \equiv 0$, $\omega \equiv |u|$ et la preuve est terminée.

Par le lemme 7.3, l'autre cas envisageable est $v \not\equiv 0$ partout sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, dans le même lemme, on a prouvé qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que
$$u \equiv \alpha v\,.$$
On peut supposer sans perte de généralité que $v > 0$ (sinon on raisonne par rapport à $(-v)$). Ainsi,
$$Z(x) = \left(1+\alpha^2\right)^{1/2} v(x) \left(\frac{\alpha}{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}}, \frac{1}{\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}} \right),$$
ce qui achève la preuve du théorème. ●

Les mots réduisent des pensées qui semblaient sans limite et qui ne sont plus qu'à hauteur d'homme lorsqu'on finit par les exprimer...

H^2

To be continued...

Bibliographie

[1] Bandle C., *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman, London, 1980.

[2] Brézis H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[3] Brock F., *Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptic problems*, Proc. Indian Acad. Sci., **110** (2000), pp. 157-204.

[4] Brock F., Solynin A., *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. AMS, **352** (1999), pp. 1759-1796.

[5] Brock F., *A general rearrangement inequality à la Hardy-Littlewood*, preprint, 2000.

[6] Cazenave T., Haraux F., *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford Sciences Publications, 2000.

[7] Cazenave T., Lions P.-L., *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Commun Math. Phy., **85** (1982), pp. 549-561.

[8] Crowe J. A., Rosenbloom P. C., Zweibel J. A., *Rearrangement of functions*, J. Functionnal Analysis, **66** (1986), pp. 432-438.

[9] De Figueiredo D. G., *The Ekeland variationnal principle with applications and detours*, Tata Institute Notes, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[10] Edelson A. L., Stuart C. A., *The principle branch of solutions of a nonlinear elliptic eigenvalue problem on* $\mathbb{R}^N$, Journal of Differential Equations, **124**, n° 2, 1996.

[11] Folland G. B., *Real analysis*, second edition, Wiley, New York, 1999.

[12] Hajaiej H., Stuart C. A., *Symmetrization inequalities for composition operators of Caratheodory type*, à paraître dans Proceedings of the London Mathematical Society.

[13] Halmos P. R., *Measure theory*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1950.

[14] Hardy G. H., Littlewood J. E. et Polya G., *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, London, 1934.

[15] Hewitt E., Stromberg K., *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[16] Jost Jürgen, *Postmodern analysis*, Univertex, Springer, 1998.

[17] Kavian O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Série mathématiques et application, **13**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[18] Kawohl B., *On rearrangements, symmetrization and maximum principles*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[19] Lieb E. H., Loss M., *Analysis, graduate studies in mathematics*, Vol. 14, AMS, Providence, 1997.

[20] Lions P.-L., *The concentration compactness principle in the calculs of variations. The locally compact case*, parts 1, 2, Annales de l'Institut Henri-Poincaré, Analyse non linéaire, 1984.

[21] Lorentz G., *An inequality for rearrangements*, Amer. Math. Monthly, **60** (1953), pp. 176-179.

[22] Mossino J., *Inégalités isopérimétriques et applications en physique*, Hermann, 1984.

[23] Polya G., Szegö G., *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. Math. Stu., n^o 27.

[24] Rudin W., *Analyse réelle et complexe*, Mc Grow-Hill Book Company, 1987.

[25] Stuart C. A., *Bifurcation for Dirichlet problems without eigenvalues*, third series **45** (1982), Proceedings of the London Mathematical Society.

[26] Stuart C. A., *A variationnal approach to bifurcation in L^p on an unbounded symmetrical domain*, Math. Ann., **26** n^o 3 (1983), pp. 51-59.

[27] Stuart C. A., *Bifurcation in $L^p(\mathbb{R}^N)$ for semilinear elliptic equations*, Proceedings of the London Mathematical Society, **57** (1986), pp. 511-514.

[28] Stuart C. A., *Bifurcation from the essential spectrum for some non-compact nonlinearities*, Mathematical Methods in Applied Sciences, **11** (1989), pp. 524-542.

[29] Strauss W., *Nonlinear wave equation*, Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, n^o 73.

[30] Tahraoui R., *Symmetrization inequalities*, Nonlinear Analysis TMA, **27** (1996), pp. 933-955 and Corrigendum **33** (2000).

[31] Tahraoui R. , Cardialeguet, *Extended Hardy-Littlewood inequalities and applications to the calculus of variations*, Ceremade (U.R.A CNRS 749).

Curriculum Vitæ

Je suis né le 9 décembre 1974 à Tunis.

Formation :

• « Sixième », école primaire d'El Menzah V, 1979-1985.

• Baccalauréat en mathématiques, lycée El Menzah VI, 1985-1992.

• Diplôme universitaire d'études supérieures en mathématiques et sciences physiques, Faculté des sciences de Tunis, 1992-1994.

• Maîtrise en mathématiques, Faculté des sciences de Tunis, 1994-1996.

• Mémoire sous la direction du Professeur C. A. Stuart, EPFL, 1996-1997.

• Diplôme lémanique d'études supérieures en mathématiques, EPFL - UNIGe-UNIL, 1996-1998.

• Travail de thèse sous la direction du Professeur C. A. Stuart, EPFL, 1998-2001.

Activités professionnelles :

• Assistant au sein du groupe d'analyse du département de mathématiques de l'EPFL pour les cours d'analyse I, II, III et IV.